D-ITET, D-MATL, RW | Lineare Algebra | HS 2013

Prof. Dr. K. Nipp

C. Schillings

Serie 12

Beachten Sie die speziellen Abgabebedingungen.

I. *Multiple Choice: Da wir einen zweiten online Test durchführen, gibt es auf dieser Serie keine Multiple Choice Aufgabe.*

II. **a)** Berechnen Sie mit Hilfe der MATLAB Funktion `eig` für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ die Normen $\|A\|_2$ und $\|A^{-1}\|_2$.

b) Sei M die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 17 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB $\|M\|_2$ und $\|M^{-1}\|_2$.

c) Vergleichen Sie die Resultate von **a)** und **b)** mit dem Ergebnis der MATLAB-Funktion `norm(·)`.

d) Beweisen Sie, dass für eine reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix M gilt:

M ist positiv definit (d.h. $x^T M x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) genau dann, wenn alle Eigenwerte von M positiv sind.

e) Sei A die nicht halbeinfache Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(i) Lösen Sie in MATLAB mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu den Zeitpunkten $t_j = j\Delta t$ für $j = 1, \dots, n$ näherungsweise, wobei $n = 10$ und $\Delta t = 0.2$. Stellen Sie die Lösung graphisch dar.
Hinweis: Benutzen Sie die ersten sechs Terme der Potenzreihe um $e^{\Delta t A}$ approximativ zu berechnen.

Bitte wenden!

(ii) Vergleichen Sie Ihr Resultat aus (i) mit dem Ergebnis der MATLAB-Funktion `expm(·)`.

III. **a)** Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen T orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein T an.

IV. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit der Transformationsmethode.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Abgabe: Semesterwoche 14, Mo 16.12., bis 12:00.
MATL: In den jeweiligen Übungen beim zugeteilten Assistenten.
ITET, RW: In den Fächern im Vorraum HG G 53.