Lösung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik
D-BAUG

Sommer 2013

Prof. H.-R. Künsch

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.
Die Lösungswege müssen, abgesehen von Aufgabe 1, nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für Aufgabe 1 erreicht wird, werden null Punkte vergeben.*

1. *(Multiple Choice)*

(a) Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie an, welche Aussagen richtig bzw. falsch sind.

(i) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. ⊗ Richtig. ○ Falsch.

(ii) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

(iii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

(iv) $\mathbf{B}$ ist eine orthogonale Matrix. ⊗ Richtig. ○ Falsch.

(v) $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ ist ein schlecht konditioniertes Problem für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

○ Richtig. ⊗ Falsch.

(vi) $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

(vii) $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

(viii) $\mathcal{F}: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$, ist eine injektive Abbildung.

⊗ Richtig. ○ Falsch.

(b) Gegeben seien $\mathbf{C}$, eine $n \times m$ Matrix, und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ein Vektor im $\mathbb{R}^n$, welcher im Spaltenraum von $\mathbf{C}$ liegt.

(i) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_5$, Untervektorräume sind oder nicht, für beliebiges $\mathbf{C}$ und $\mathbf{b}$ gemäss obigen Angaben.

- $L_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \mathbf{Cx} = \mathbf{0} \right\}$

  ⊗ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_2 = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{Es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \text{ sodass } \mathbf{Cx} = \mathbf{y} \right\}$

  ⊗ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_3 = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \text{Es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ sodass } \mathbf{C}^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \right\}$,

  ⊗ ist ein Untervektorraum ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_4 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \mathbf{Cx} = \mathbf{b} \right\}$,

  ○ ist ein Untervektorraum ⊗ ist kein Untervektorraum.

- $L_5 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z} \text{ mit } \mathbf{y} \in L_4, \, \mathbf{z} \in L_4 \right\}$.

  ⊗ ist ein Untervektorraum ○ ist kein Untervektorraum.

(ii) Kreuzen Sie an, welche Aussagen für beliebiges $\mathbf{C}$ gemäss obigen Angaben richtig bzw. falsch sind.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden eine Basis von L_2.

  ○ Richtig. ⊗ Falsch.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden eine Basis von L_3.

  ○ Richtig. ⊗ Falsch.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden ein Erzeugendensystem von L_2.

  ⊗ Richtig. ○ Falsch.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden ein Erzeugendensystem von L_3.

  ○ Richtig. ⊗ Falsch.

- $\dim(L_3) = m - \dim(L_1)$. ⊗ Richtig. ○ Falsch.
- $\dim(L_3) = n - \dim(L_1)$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.
- $\dim(L_2) = m - \dim(L_1)$. ⊗ Richtig. ○ Falsch.

2. Wir definieren die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche gemäss untenstehender Abbildung 1 das graue Dreieck in das schwarze überführt, wobei $\mathcal{F}(P) = R$, $\mathcal{F}(Q) = S$. Zudem bezeichnen wir die lineare Abbildung, welche das schwarze Dreieck in das graue überführt, mit $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, wobei $\mathcal{G}(R) = P$ und $\mathcal{G}(S) = Q$.

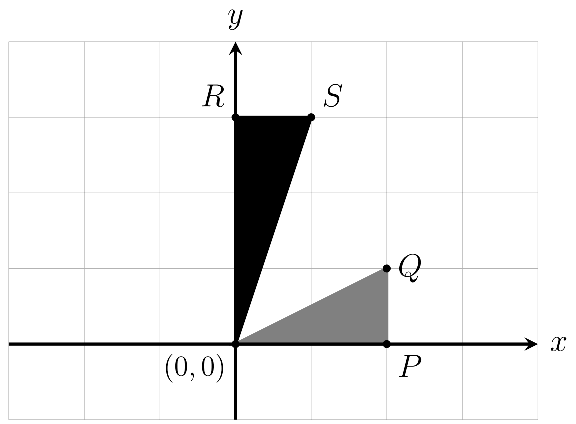


Abbildung 1: Situationserklärung der Aufgabe

(a) Stellen Sie die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ in Matrixform dar:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}\,,$$

d.h. geben Sie $\mathbf{A}$ an.

(b) Geben Sie analog zu Teilaufgabe (a) die Matrix $\mathbf{B}$ an, für welche gilt

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}\,.$$

Falls Sie Teilaufgabe (a) nicht gelöst haben sollten, verwenden Sie für die nachfolgenden Teilaufgaben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ aus Teilaufgabe (a).

(d) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Matrix $\mathbf{A}$ aus Teilaufgabe (a).

(e) Die Abbildung $\mathcal{F}$ bildet den Kreis

$$K = \left\{(x, y)\,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

auf die Menge $K' := \mathcal{F}(K) \subset \mathbb{R}^2$ ab. Berechnen Sie die Fläche von K'.
Hinweis: Die Rechnung ist sehr kurz!

Lösung:

(a) Wir betrachten die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und untersuchen damit die Abbildung $\mathcal{F}$. Zudem definieren wir die Ortsvektoren der Punkte P, Q, R und S mit $\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ resp. $\mathbf{v}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir durch Ausnützen der Linearität von $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{e}_1) &= \mathcal{F}(\frac{1}{2}\mathbf{v}_P) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathbf{v}_P) = \frac{1}{2}\mathbf{v}_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{F}(\mathbf{e}_2) &= \mathcal{F}(\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P) = \mathcal{F}(\mathbf{v}_Q) - \mathcal{F}(\mathbf{v}_P) \\ &= \mathbf{v}_S - \mathbf{v}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = x_1\mathcal{F}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathcal{F}(\mathbf{e}_2) = x_1\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

also ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Teilaufgabe zu lösen. Einerseits stellt man fest, dass $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$, somit gilt

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Andererseits kann man das Vorgehen in (a) wiederholen und erhält:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{e}_1) &= \mathcal{G}(\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_R) = \mathcal{G}(\mathbf{v}_S) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_R) = \mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{G}(\mathbf{e}_2) &= \mathcal{G}(\frac{1}{3}\mathbf{v}_R) = \frac{1}{3}\mathcal{G}(\mathbf{v}_R) = \frac{1}{3}\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = x_1\mathcal{G}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathcal{G}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

also $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Um die Eigenwerte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ von $\mathbf{A}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{3}{2} & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - \frac{3}{2}.$$

Die Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir analog $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$).

Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ von $\mathbf{A}$ erhalten wir über die Bedingung (i=1,2)

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}^{(i)} &&= \mathbf{0}\,,\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 \\ \frac{3}{2} & -\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \mp\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ \frac{3}{2} & \mp\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \mp\sqrt{\frac{3}{2}} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\mathbf{v}^{(1)} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^{(2)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$. Für die weiteren Teilaufgaben benennen wir mit $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ die Repräsentanten mit $s=t=1$.

(Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir analog

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}^{(i)} &&= \mathbf{0}\,,\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} -\lambda_i & \frac{2}{3} \\ 1 & -\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \mp\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} \\ 1 & \mp\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \mp\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\mathbf{v}^{(1)} = s\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^{(2)} = t\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$. Für die weiteren Teilaufgaben benennen wir mit $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ die Repräsentanten mit $s=t=1$.)

(d) $\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen wir, indem wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ darstellen:

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}\,.
$$

Somit bekommen wir, indem wir verwenden, dass $\mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(i)}\right) = {\lambda_i}^{100}\mathbf{v}^{(i)}$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}\right)\\
&= \mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(1)}\right) + \mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(2)}\right)\\
&= {\lambda_1}^{100}\mathbf{v}^{(1)} + {\lambda_2}^{100}\mathbf{v}^{(2)}\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{50}\left(\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{50}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ erhalten wir analog

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{v}^{(1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{v}^{(2)}.$$

Somit bekommen wir, indem wir verwenden, dass $\mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(i)}\right) = {\lambda_i}^{100}\mathbf{v}^{(i)}$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{100}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{v}^{(1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{v}^{(2)}\right)\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(1)}\right) - \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{A}^{100}\left(\mathbf{v}^{(2)}\right)\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\left({\lambda_1}^{100}\mathbf{v}^{(1)} - {\lambda_2}^{100}\mathbf{v}^{(2)}\right)\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}\left(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{50}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

)

(e) Wir wissen, dass sich die Fläche einer Menge unter der linearen Abbildung $\mathcal{F}$ um den Faktor $|\det(\mathbf{A})|$ verändert. Der Kreis K hat Radius $r = 1$ und somit die Fläche $\pi r^2 = \pi$. Da gilt $K' = \mathcal{F}(K)$, erhalten wir für die Fläche von K':

$$\pi|\det(\mathbf{A})| = \frac{3}{2}\pi.$$

(Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ erhalten wir analog für die Fläche von K':

$$\pi|\det(\mathbf{A})| = \frac{2}{3}\pi.$$

)

3. Es seien die vier Punkte $A = (4,3)$, $B = (3,6)$, $C = (2,1)$ und $D = (0,6)$ gegeben, durch die ein Kreis gelegt werden soll. Die Koeffizienten a, b, c der Kreisgleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + ax_1 + bx_2 + c = 0$$

sollen im Sinne der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem für a, b, c auf, das erfüllt wäre, wenn alle 4 Punkte auf einem Kreis liegen würden.

(b) Berechnen Sie den Residuenvektor $\mathbf{r}$ für $(a,\ b,\ c) = \frac{1}{283}(-805, -2097, 2346)$.

(c) Beschreiben Sie, wie Sie nachprüfen könnten, dass die Koeffizienten in (b) die Kleinste-Quadrate-Lösung des in (a) gefundenen Gleichungssystems darstellen. Das Einsetzen von Zahlenwerten ist nicht erforderlich.

(d) Liegt der Punkt A innerhalb oder ausserhalb des Kreises, der zur Kleinste-Quadrate-Lösung gehört?

Lösung:

(a) Wir erhalten die Bedingungsgleichungen, indem wir die Koordinaten der Punkte A, B, C und D in die Kreisgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rrrrr} 16+ & 9+ & 4a+ & 3b+ & c = 0\,, \\ 9+ & 36+ & 3a+ & 6b+ & c = 0\,, \\ 4+ & 1+ & 2a+ & b+ & c = 0\,, \\ & 36 & + & 6b+ & c = 0\,. \end{array}$$

Somit gilt $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = -\begin{pmatrix} 25 \\ 45 \\ 5 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Residuenvektor ist gegeben durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \frac{-1}{283}\begin{pmatrix} 7165 \\ 12651 \\ 1361 \\ 10236 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 45 \\ 5 \\ 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{283}\begin{pmatrix} -90 \\ 84 \\ 54 \\ -48 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.318 \\ 0.297 \\ 0.191 \\ -0.170 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate erfüllt die Normalengleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Wir müssen also nur zeigen, dass $(a, b, c) = \frac{1}{283}(-805, -2097, 2346)$ die Normalengleichung (3c) erfüllt.

Wir können zudem (b) ausnutzen und über den bereits berechneten Residuenvektor ausdrücken um die Rechnung weiter zu vereinfachen:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{r} = \mathbf{0}\,.$$

Somit

(d) Einsicht darüber, was innerhalb bzw. ausserhalb des Kreises liegt, erhalten wir, indem wir bemerken, dass die Kreisgleichung auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(x_1 - x_P)^2 + (x_2 - y_P)^2 - r^2 = 0\,,$$

wobei (x_P, y_P) den Mittelpunkt des Kreises und r den Radius des Kreises benennen.

Ein negatives Vorzeichen im Residuum $\mathbf{r}$ bedeutet also, dass der dazugehörige Punkt innerhalb des Kreises, ein positives Vorzeichen, dass der dazugehörige Punkt ausserhalb des Kreises liegt. Somit gilt mit Teilaufgabe (b), dass A innerhalb des Kreises liegt.

4. (a) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei reellen Parametern α und β durch die augmentierte Matrix

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 17 & 5 & 13 & 0 & 2 \\ -11 & 8 & 9 & 4 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & -2 & 1 \end{array}\right]. \tag{2}$$

Geben Sie an, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

(i) genau eine,

(ii) mehr als eine,

(iii) gar keine

Lösung besitzt. Die Lösungen selbst müssen Sie nicht angeben.

(b) Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1+\mathrm{i})\, z_1 & - & 2\, z_2 & + & z_3 & = & 0 \\ (1-\mathrm{i})\, z_1 & + & 2\mathrm{i}\, z_2 & & & = & 8 \end{array}, \tag{3}$$

wobei i die komplexe Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Berechnen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems (3).

Lösung:

(a) Wir wenden die Gausselimination auf (2) an. Aufgrund der Form der augmentierten Matrix müssen wir nur einen Eliminationsschritt durchführen (4.Zeile - $\frac{\alpha}{2}$ 3.Zeile) (die lineare Unabhängigkeit der beiden ersten Zeilen ist offensichtlich und deshalb hat dieser Teil keinen Einfluss auf die Anzahl Lösungen. Jedoch kann man natürlich auch dort den Gaussalgorithmus anwenden (2.Zeile $+\frac{11}{17}$ 1.Zeile)):

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 17 & 5 & 13 & 0 & 2 \\ 0 & 8+\frac{55}{17} & 9+\frac{143}{17} & 4 & \alpha+\beta+\frac{22}{17} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -2-\frac{\alpha}{2} & 1-\frac{\alpha\beta}{2} \end{array}\right]$$

(i) Genau eine Lösung erhalten wir demnach, falls die Matrix auf der linken Seite vollen Rang besitzt, was gleichbedeutend mit $-2-\frac{\alpha}{2} \neq 0$ ist, also für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Um mehr als eine Lösung zu erhalten, muss demnach gelten $\alpha = -4$. Zudem muss der Eintrag $1-\frac{\alpha\beta}{2} = 1+2\beta$ auf der rechten Seite verschwinden, also muss gelten $\beta = -\frac{1}{2}$.

(iii) Keine Lösung bekommen wir demnach, falls $\alpha = -4$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Lösung der Teilaufgabe (a) für Mario Dolder: Wir wenden die Gausselimination auf (2) an. Aufgrund der Form der augmentierten Matrix müssen wir nur einen Eliminationsschritt durchführen (4.Zeile - $\frac{\alpha}{2}$ 3.Zeile) (die lineare Unabhängigkeit der beiden ersten Zeilen ist offensichtlich und deshalb hat dieser Teil keinen Einfluss auf die Anzahl Lösungen. Jedoch kann man natürlich auch dort den Gaussalgorithmus anwenden (2.Zeile $+\frac{11}{17}$ 1.Zeile)):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 17 & 5 & 13 & 0 & 2 \\ 0 & 8+\frac{55}{17} & 9+\frac{143}{17} & 4 & \alpha+\beta+\frac{22}{17} \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha & 1-\frac{\alpha\beta}{3} \end{array}\right]$$

(i) Genau eine Lösung erhalten wir demnach, falls die Matrix auf der linken Seite vollen Rang besitzt, was gleichbedeutend mit $1-\alpha \neq 0$ ist, also für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Um mehr als eine Lösung zu erhalten, muss demnach gelten $\alpha = 1$. Zudem muss der Eintrag $1-\frac{\alpha\beta}{3} = 1-\frac{\beta}{3}$ auf der rechten Seite verschwinden, also muss gelten $\beta = 3$.

(iii) Keine Lösung bekommen wir demnach, falls $\alpha = 1$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(b) Wir berechnen die Lösungen, indem wir (2) als augmentierte Matrix darstellen und den Gaussalgorithmus anwenden.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1+\mathrm{i} & -2 & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 8 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1+\mathrm{i} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 8 \end{array}\right]$$

Somit erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned} z_2 &= t \in \mathbb{C}\,, \\ z_3 &= \frac{8}{\mathrm{i}} = -8\mathrm{i}\,, \\ z_1 &= \frac{1}{1+\mathrm{i}}(-8\mathrm{i}+2t) = t-4-(4+t)\mathrm{i}\,, \end{aligned}$$

also $\mathcal{L} = \left\{(z_1, z_2, z_3) = (t-4-(4+t)\mathrm{i},\ t,\ -8\mathrm{i}) \;\middle|\; t \in \mathbb{C}\right\}$.

5. Wir wollen den Schnittpunkt x^* von $f(x) = \cos(\frac{x}{4})$ und $g(x) = \log(x)$ mithilfe der Fixpunktiteration bestimmen.

   (a) Zeichnen Sie den Graphen der beiden Funktionen und markieren Sie den Schnittpunkt.

   (b) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt x^* von $f(x)$ und $g(x)$ Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = F(x), \quad F(x) = \exp\left(\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right) \tag{4}$$

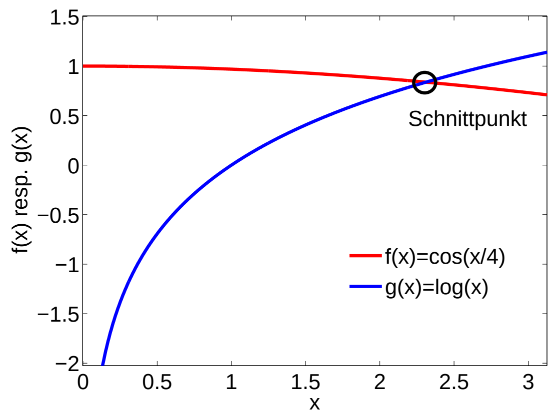
   ist.

   (c) Geben Sie die Fixpunktiteration für (4) an und berechnen Sie das Ergebnis der ersten Iteration x_1 für den Startwert $x_0 = 0$.

   (d) Zeigen Sie, dass die Fixpunktgleichung (2) im Intervall $I = [0, \pi]$ genau eine Lösung x^* hat und dass die Fixpunktiteration für beliebigen Startwert $x_0 \in I$ gegen diese Lösung x^* konvergiert. Verifizieren Sie dazu die Voraussetzungen für den Fixpunktsatz aus der Vorlesung.

Lösung:

(a)



(b) Der Schnittpunkt x^* von $f(x)$ und $g(x)$ ist gegeben durch die Bedingung

$$f(x^*) = g(x^*)\,.$$

Durch Ausschreiben und Umformen erhalten wir

$$\log(x^*) = \cos\left(\frac{x^*}{4}\right) \Leftrightarrow x^* = \exp\left(\cos\left(\frac{x^*}{4}\right)\right)\,,$$

was mit der Bedingung (4) übereinstimmt.

(c) Die Fixpunktiteration für (4) lautet für den Index $k = 1, ..., N$:

$$x_k = F(x_{k-1})\,.$$

Somit lautet das Ergebnis der ersten Iteration

$$x_1 = F(x_0) = \exp\left(\cos\left(\frac{x_0}{4}\right)\right) = \exp(1) \approx 2.718\,.$$

(d) Zu verifizieren sind die beiden Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

(i) $F : I \to I$, wobei $I = [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen.
Dass I abgeschlossen ist klar. Zu zeigen bleibt nur, dass $F(I) \subset I$. Wir beweisen dies, indem wir zeigen, dass F monoton fallend ist und somit

$$F(I) \subset [F(\pi), F(0)] = [\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \exp(1)] \subset [2, 2.72] \subset I\,.$$

Für alle $x \in I$ gilt

$$F'(x) \leq -\frac{1}{4}\underbrace{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}_{\geq 0}\underbrace{\exp\left(\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right)}_{\geq 0} \leq 0\,.$$

Somit ist F monoton fallend auf I.

(ii) F ist kontrahierend. Dies ist erfüllt, sofern wir zeigen können

$$|F'(x)| < 1 \text{ für alle } x \in I\,.$$

Für alle $x \in I$ gilt

$$|F'(x)| = \frac{1}{4}\underbrace{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}_{\leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}}\underbrace{\exp\left(\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right)}_{\leq \exp(1)} \leq \frac{\sqrt{2}}{8}\exp(1) < \frac{1}{2} < 1\,.$$

6. Gegeben sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Spalten von $\mathbf{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

(b) Berechnen Sie den ersten Schritt der **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumstrategie. Vergessen Sie nicht, zusätzlich zum veränderten Schema/Tableau die Matrix $\mathbf{L}_1$ und die Permutationsmatrix $\mathbf{P}_1$ für den ersten Schritt anzugeben.

(c) Ist die **LR**-Zerlegung ohne Zeilen- oder Spaltenvertauschung anwendbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sie bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$ genau dann, wenn sie linear unabhängig sind. Wir müssen somit zeigen, dass

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_4 = 0\,. \tag{5}$$

Dies ist erfüllt, sofern $\mathbf{A}$ regulär ist, also vollen Rang hat. Wir führen, mit Blick auf Teilaufgae (b), die **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumstrategie durch, um zu zeigen, dass $\mathbf{A}$ vollen Rang hat. Dazu schreiben wir die Matrix $\mathbf{A}$ als Schema/Tableau und vertauschen als erstes die 3. und die 1. Zeile (der maximale Eintrag der aktuellen Zeile ist jeweils rot markiert):

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \textcolor{red}{3} & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \textcolor{red}{4} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 4 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} & -\frac{11}{12} \end{array}\right].$$

Somit lässt sich leicht ablesen, dass $\mathbf{A}$ vollen Rang hat, bzw. (5) erfüllt ist.

(b) Da wir die **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumstrategie bereits in Teilaufgabe (a) berechnet haben, geben wir hier nur die Matrizen an:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Nein, sie ist nicht anwendbar, da der Eintrag $a_{11} = 0$. Wendet man den **LR**-Algorithmus ohne Spalten- oder Zeilenmaximumstrategie an, teilt man bereits im ersten Eliminationsschritt bei der Berechnung von $l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ durch 0, erhält also etwas, das nicht definiert ist.