Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Sommer 2012

Prof. H.-R. Künsch

---

1. *Multiple Choice:*

   Gegeben sei die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) ⊗ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist eine 4×4 Matrix mit $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)_{1\,2} = 4$.

   ○ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist eine 5×5 Matrix mit $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)_{1\,2} = 3$.

   ○ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist nicht definiert.

   (b) Die Dimension des Kerns von $\mathbf{A}$ ist

   ○ 0 ○ 1 ⊗ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5.

   (c) Die Dimension des Bildes von $\mathbf{A}$ ist

   ○ 0 ○ 1 ○ 2 ⊗ 3 ○ 4 ○ 5.

Zur Wiederholung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Das Bild von $\mathbf{A}$ ist gleich

○ $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

⊗ $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,

○ $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

○ $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,

⊗ $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Zur Wiederholung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Der Kern von $\mathbf{A}$ ist gleich

- ⊗ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,
- ○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,
- ⊗ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,
- ○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,
- ○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(f) Sei

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{exakt}} - \mathbf{x}_{\text{gestört}},$$

wobei $\mathbf{x}_{\text{exakt}}$ die exakte Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{exakt}} = \mathbf{c}$$

und $\mathbf{x}_{\text{gestört}}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{gestört}} = \mathbf{c}_{\text{gestört}} = \mathbf{c}_{\text{exakt}} + \Delta\mathbf{c}.$$

Nehmen wir an, die Kondition des linearen Gleichungssystems sei 10. Dies bedeutet:

○ Wenn die rechte Seite des Gleichungssystems eine Störung von 10^{-3} aufweist, d.h. $\|\Delta\mathbf{c}\| = 10^{-3}$, dann ändert sich die Lösung um maximal 10^{-2}.

⊗ Wenn die rechte Seite des Gleichungssystems eine Störung von 0.1% aufweist, d.h. $\|\Delta\mathbf{c}\| = 10^{-3}\|\mathbf{c}\|$, dann ändert sich die Lösung um maximal 1%.

Bemerkung:

Per Definition gilt:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_{\text{exakt}}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{exakt}}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b}_{\text{exakt}} - \mathbf{b}_{\text{gestört}})\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_{\text{exakt}}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}_{\text{exakt}}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_{\text{exakt}}\|}$$
$$\leq \underbrace{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|}_{\text{cond}(\mathbf{A})} \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}_{\text{exakt}}\|},$$

also

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_{\text{exakt}}\|} \leq 10 \cdot 0.1 = 1.$$

2. (a) Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem abhängig vom reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x_1 & + & (1+3\alpha)\,x_2 & + & (\alpha+6)\,x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \alpha\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & (3+2\alpha)\,x_2 & + & (\alpha^2+3\alpha+3)\,x_3 & = & \alpha+2 \end{array}$$

Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau (Schema) und wenden Sie das Gausssche Eliminationsverfahren darauf an, um das Tableau in Zeilenstufenform zu bringen.

Lösung:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 3 & 1+3\alpha & \alpha+6 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 3+2\alpha & \alpha^2+3\alpha+3 & \alpha+2 \\ \hline \end{array}$$

Nach Vertauschen der ersten mit der zweiten Spalte erhalten wir nach dem ersten Gausseliminationsschritt:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 3 & 1+3\alpha & \alpha+6 & 1 \\ 2 & 3+2\alpha & \alpha^2+3\alpha+3 & \alpha+2 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 3 & \alpha^2+3\alpha-1 & \alpha+2 \\ \hline \end{array}$$

Nun fehlt noch ein Schritt zur Zeilenstufenform.

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \\ \hline \end{array}$$

(b) Gegeben sei folgendes Endschema in Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \\ \hline \end{array}$$

Für welche reellen Parameter α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele bzw. keine Lösung?

Bestimmen Sie die Lösungsmenge zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist.

Lösung:

Zuerst überprüfen wir, ob es Fälle gibt, für die wir keine Lösung oder unendlich viele Lösungen finden. Dazu setzen wir in der untersten Zeile des Schemas $\alpha^2 - 1 := 0$ und erhalten $\alpha = \pm 1$.

Für $\alpha = 1$ erhalten wir für den Teil der rechten Seite $\alpha - 1 = 0$. Wir erhalten also unendlich viele Lösungen:

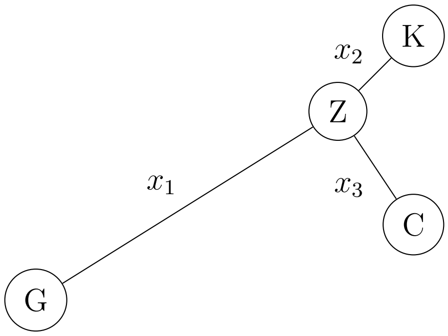
$$\mathcal{L} = \{(-1-2t, 1-t, t) | t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Für $\alpha = -1$ ist $\alpha - 1 = -2 \neq 0$ und somit existiert in diesem Fall keine Lösung (Verträglichkeitsbedingung verletzt).

Für alle anderen $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1,\ 1\}$ gibt es genau eine Lösung, nämlich

$$\mathcal{L} = \{\frac{1}{\alpha+1}(-\alpha-3,\ 1,\ 1)\}.$$

3. Auf verschiedenen Autobahnfahrten zwischen Zürich (Z), Chur (C), Konstanz (K), Genf (G) werden auf dem Kilometerzähler folgende Distanzen abgelesen:



Z-K	G-K	C-G	C-K	Z-C
70	350	400	200	100

(a) Lesen Sie alle Gleichungen für die Längen x_1, x_2, x_3 der Teilstrecken Z-G, Z-K, Z-C ab und schreiben Sie diese in der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Lösung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 70 \\ 350 \\ 400 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{b}}$$

(b) Zeigen Sie, dass die beste approximative Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate gegeben ist durch $x_1^* = 280$, $x_2^* = 75$ und $x_3^* = 115$.

Lösung:

Es gibt nun verschiedene Ansätze, zu zeigen, dass $x_1^* = 280$, $x_2^* = 75$ und $x_3^* = 115$ die beste approximative Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate darstellen. Sei dafür $\mathbf{x}^* := (x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)^T$.

Eine Möglichkeit ist, zu zeigen, dass

$$\mathbf{A}^T \left(\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}\right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0},$$

indem wir $\mathbf{x}^*$ in die Gleichung einsetzen.

Man kann aber auch - und das ist die aufwendigere Variante - das obige Gleichungssystem nach $\mathbf{x}^*$ auflösen.

Zu lösen ist die Normalengleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T\mathbf{b},$$

also

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 620 \\ 700 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des Gaussalgorithmus erhalten wir dann die Bestapproximation

$$\begin{array}{|ccc|c|} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 375 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 98 \\ 0 & 0 & 1 & 115 \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \{(280,\ 75,\ 115)\}\,.$$

Also repräsentiert $\mathbf{x}^*$ tatsächlich die Bestapproximation.

(c) Wir nehmen nun an, dass die exakten Distanzen x_1, x_2, x_3 gleich x_1^*, x_2^*, x_3^* aus (b) sind. Welchen Fehler hat dann der Kilometerzähler in den 5 obigen Fahrten jeweils gemacht?

Lösung:

Durch Einsetzen der exakten Distanzen in

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}|$$

erhalten wir den Fehlervektor $(5,\ 5,\ 5,\ 10,\ 15)$, also

i. Fahrt Z-K: $|x_2 - 70| = 5$
ii. Fahrt G-K: $|(x_1 + x_2) - 350| = 5$
iii. Fahrt C-G: $|(x_1 + x_3) - 400| = 5$
iv. Fahrt C-K: $|(x_2 + x_3) - 200| = 10$
v. Fahrt Z-C: $|x_3 - 100| = 15$

4. Gegeben sei folgende Dreiecksmatrix :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Dreiecksmatrix $\mathbf{A}$.

Lösung: Die zwei verschiedenen Eigenwerte von $\mathbf{A}$ können direkt abgelesen werden:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1.$$

(b) Berechnen Sie möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.

Lösung: Die Eigenvektoren $\mathbf{v}$ für $\lambda_1 = 2$ erhalten wir über die Bedingung

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{1}_{5\times 5})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Wir erhalten also das folgendes Schema für unser lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{|ccccc|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|ccccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

und können die Lösungen direkt ablesen:

$$\mathcal{L} = \left\{ (t,\ -\frac{3}{2}s,\ s,\ -\frac{1}{2}s,\ s) \middle|\ s,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich bilden z.B. die Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1^1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T,\ \mathbf{v}_2^1 = (0,\ -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1)^T$$

eine Basis des Eigenraums von λ_1.

Für λ_2 erhalten wir auf dieselbe Art und Weise

$$\begin{array}{|ccccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|ccccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

und somit

$$\mathcal{L} = \left\{ (0,\ t,\ s,\ 0,\ 0) \middle|\ s,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es bilden also z.B.

$$\mathbf{v}_1^2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^T,\ \mathbf{v}_2^2 = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)^T$$

eine Basis des Eigenraums von λ_2.

(c) Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar? Geben Sie eine Diagonalisierung an, oder begründen Sie, weshalb keine existiert.

Lösung:

Die Matrix ist nicht diagonalisierbar, da sich die Dimensionen der zwei verschiedenen Eigenräume zu 4 aufsummieren, was nicht der Anzahl Spalten resp. Zeilen von $\mathbf{A}$ entspricht: $\#\text{Zeilen} = 5 > 4$.

Eine kürzere Begründung dafür, dass $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar ist, wäre

$$3 = \text{algV}(\lambda_1) \neq \text{geomV}(\lambda_1) = 2.$$

Wobei algV, geomV für die algebraische resp. geometrische Vielfachheit stehen.

5. Ziel dieser Aufgabe ist das Finden einer Nullstelle der nichtlinearen Funktion

$$f((x,\ y)^T) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y + xy \\ xy + x - y - 1 \end{pmatrix}$$

mithilfe von numerischen Verfahren.

(a) Berechnen Sie die Jacobi Matrix $\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big)$ d.h. die Matrix der partiellen Ableitungen von f.

Lösung:

Die Jacobi Matrix $\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big)$ sieht folgendermassen aus:

$$\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big) = \begin{pmatrix} y & \mathrm{e}^y + x \\ y+1 & x-1 \end{pmatrix}.$$

(b) Schreiben Sie die Gleichung für die Newtoniteration auf und berechnen Sie den ersten Newtonschritt für den Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{1}{2},\ -1)^T$ exakt (d.h. ohne numerische Näherung der Zahl e).

Lösung:

Die Newtoniteration für $k \in \mathbb{N}_0$ lautet

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \big(\mathrm{d}f\big(\mathbf{x}^{(k)}\big)\big)^{-1} f\big(\mathbf{x}^{(k)}\big)\,.$$

Die Inverse erhalten wir mithilfe der Adjunkten und der Determinanten von $\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big)$:

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big)\big)^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathrm{d}f((x,y)^T))}\,\mathrm{adj}(\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big) \\ &= -\frac{1}{x+y+(y+1)\,\mathrm{e}^y}\begin{pmatrix} x-1 & -\mathrm{e}^y - x \\ -y-1 & y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

In unserem Fall erhalten wir also für den ersten Newtonschritt mit Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = \big(\frac{1}{2}, -1\big)^T$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} - \big(\mathrm{d}f\big(\mathbf{x}^{(0)}\big)\big)^{-1} f\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -e^{-1} - \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.3679 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da in der Vorlesung erklärt wurde, dass man das Berechnen der Inverse vermeiden sollte, steht im folgenden Abschnit eine zweite Lösungsvariante:

Wir starten mit folgender Gleichung, welche ebenfalls das Newtonverfahren beschreibt, aber keine explizite Inverse verlangt:

$$\mathrm{d}f\big(\mathbf{x}^{(k)}\big)\,\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathrm{d}f\big(\mathbf{x}^{(k)}\big)\,\mathbf{x}^{(k)} - f\big(\mathbf{x}^{(k)}\big)\,.$$

Die rechte Seite kann ausgewertet werden. Wir müssen also in jedem Iterationsschritt noch das lineare Gleichungssystem für $\mathbf{x}^{(k+1)}$ lösen. Wir machen dies nun für $\mathbf{x}^{(1)}$, indem wir zuerst den Startwert $\mathbf{x}^{(0)}$ in obige Gleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -1 & e^{-1}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & e^{-1}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{-1}-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & e^{-1}+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2\,\mathrm{e}^{-1} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Lösung lässt sich direkt ablesen:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \big(\mathrm{e}^{-1},\ -1\big)^T\,.$$

(c) Was passiert im nächsten Newtonschritt?

Lösung:

Führen wir einen weiteren Schritt aus, bemerken wir, dass wir mit $\mathbf{x}^{(1)}$ bereits eine Nullstelle gefunden haben (entweder man bemerkt, dass $\mathbf{x}^{(1)}$ ein Fixpunkt der Newtoniterationsgleichung ist, oder dass $f(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{0}$).

6. Gegeben sei folgendes System von linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = 8x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = 6x_1 + 3x_2.$$

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

Lösung:

Es gilt $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Um die Eigenwerte zu berechnen setzen wir

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 \\ 6 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 11\lambda + 30 &= 0, \end{aligned}$$

und erhalten $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 5$.

Die Eigenvektoren erhalten wir auf gleiche Weise wie in Aufgabe 4. Für $\lambda_1 = 6$ erhalten wir

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{1}_{2\times 2})\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{|cc|c|} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|cc|c|} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Also erhalten wir die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{(t,\ 2t) |\ t \in \mathbb{R}\}$ und nehmen den Eigenvektor $v_1 = (1,\ 2)^T$.

Für $\lambda_2 = 5$ bekommen wir analog

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbb{1}_{2\times 2})\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{|cc|c|} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|cc|c|} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

mit $\mathcal{L} = \{(t,\ 3t) |\ t \in \mathbb{R}\}$ und wählen $\mathbf{v}_2 = (1,\ 3)^T$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Systems zur Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = (1,\ 1)^T.$$

Lösung:

Setzen wir $\mathbf{T} := [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, gilt $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$, mit $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Substituieren wir in der Differentialgleichung $\mathbf{y} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ und multiplizieren die Gleichung von links mit $\mathbf{T}^{-1}$, erhalten wir

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\mathbf{y}.$$

Dieses entkoppelte System ist einfach zu lösen. Wir erhalten

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix},$$

was uns nach der Rücktransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ die folgende Lösung für $\mathbf{x}$ liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{T}\, e^{\mathbf{D}t} \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\,e^{6t} - 2\,e^{5t} & -e^{6t} + e^{5t} \\ 6\,e^{6t} - 6\,e^{5t} & -2\,e^{6t} + 3\,e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir setzen in der Lösung, welche in (a) berechnet wurde die Anfangsbedingung ein und erhalten die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\,e^{6t} - e^{5t} \\ 4\,e^{6t} - 3\,e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Ein schnellerer Lösungsweg bietet sich an:
Mithilfe der in (a) berechneten Eigenwerte und Eigenvektoren kann man auch direkt die allgemeine Lösung hinschreiben:

$$\mathbf{x}(t) = A\,e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + B\,e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = A\,e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B\,e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei A, $B \in \mathbb{R}$, konstant.
Die Lösung zum Startwert $\mathbf{x}(0) = (1,\ 1)^T$ erhalten wir nun, indem wir folgendes Gleichungssystem lösen (zur Erinnerung: $\mathbf{T} := [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2]$):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \mathbf{x}(0) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also durch Gausselimination folgendes Endschema:

1	1	1
0	1	−2

welches uns zu folgenden Werten für die Konstanten führt: $A = 2$, $B = -1$.
Also erhalten wir die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = 2\,e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\,e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie die expizite Eulerapproximation von $\mathbf{x}(1)$ zur Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = (1,\ 1)^T$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Lösung:

Da wir die Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$ berechnen wollen, müssen wir zwei Eulerschritte durchführen, da $h = \frac{1}{2}$. Sei

$$f(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}$$

die rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung. Dann erhalten wir mithilfe des expliziten Eulers:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(h) \approx \mathbf{x}_h &= \mathbf{x}(0) + hf(\mathbf{x}(0)) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{x}(2h) \approx \mathbf{x}_{2h} &= \mathbf{x}_h + hf(\mathbf{x}_h) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 79 \\ 109 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$