Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Sommer 2013

Prof. H.-R. Künsch

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum		

1	2	3	4	5	6	Total

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Selbständig verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, Taschenrechner.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und legen Sie es weg.

Viel Erfolg!

Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik
D-BAUG

Sommer 2013

Prof. H.-R. Künsch

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.
Die Lösungswege müssen, abgesehen von Aufgabe 1, nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für Aufgabe 1 erreicht wird, werden null Punkte vergeben.*

1. *(Multiple Choice)*

(a) Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie an, welche Aussagen richtig bzw. falsch sind.

(i) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. ○ Richtig. ○ Falsch.

(ii) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. ○ Richtig. ○ Falsch.

(iii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. ○ Richtig. ○ Falsch.

(iv) $\mathbf{B}$ ist eine orthogonale Matrix. ○ Richtig. ○ Falsch.

(v) $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ ist ein schlecht konditioniertes Problem für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
○ Richtig. ○ Falsch.

(vi) $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$. ○ Richtig. ○ Falsch.

(vii) $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. ○ Richtig. ○ Falsch.

(viii) $\mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$, ist eine injektive Abbildung.
○ Richtig. ○ Falsch.

(b) Gegeben seien $\mathbf{C}$, eine $n \times m$ Matrix, und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ein Vektor im $\mathbb{R}^n$, welcher im Spaltenraum von $\mathbf{C}$ liegt.

(i) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_5$ Untervektorräume sind oder nicht, für beliebiges $\mathbf{C}$ und $\mathbf{b}$ gemäss obigen Angaben.

- $L_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

  ○ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \text{, sodass } \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$

  ○ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_3 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{Es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{, sodass } \mathbf{C}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$,

  ○ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$,

  ○ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

- $L_5 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z} \text{ mit } \mathbf{y} \in L_4, \mathbf{z} \in L_4\}$.

  ○ ist ein Untervektorraum. ○ ist kein Untervektorraum.

(ii) Kreuzen Sie an, welche Aussagen für beliebiges $\mathbf{C}$ gemäss obigen Angaben richtig bzw. falsch sind.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden eine Basis von L_2.

  ○ Richtig. ○ Falsch.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden eine Basis von L_3.

  ○ Richtig. ○ Falsch.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden ein Erzeugendensystem von L_2.

  ○ Richtig. ○ Falsch.

- Die Zeilen von $\mathbf{C}$ bilden ein Erzeugendensystem von L_3.

  ○ Richtig. ○ Falsch.

- $\dim(L_3) = m - \dim(L_1)$. ○ Richtig. ○ Falsch.
- $\dim(L_3) = n - \dim(L_1)$. ○ Richtig. ○ Falsch.
- $\dim(L_2) = m - \dim(L_1)$. ○ Richtig. ○ Falsch.

2. Wir definieren die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche gemäss untenstehender Abbildung 1 das graue Dreieck in das schwarze überführt, wobei $\mathcal{F}(P) = R$, $\mathcal{F}(Q) = S$. Zudem bezeichnen wir die lineare Abbildung, welche das schwarze Dreieck in das graue überführt, mit $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, wobei $\mathcal{G}(R) = P$ und $\mathcal{G}(S) = Q$.

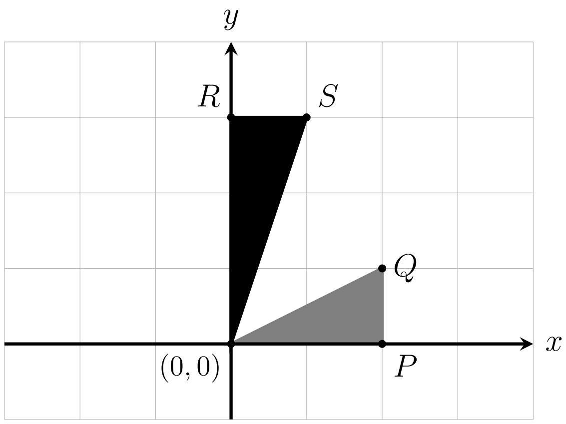

Abbildung 1: Situationserklärung der Aufgabe

(a) Stellen Sie die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ in Matrixform dar:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}\,,$$

d.h. geben Sie $\mathbf{A}$ an.

(b) Geben Sie analog zu Teilaufgabe (a) die Matrix $\mathbf{B}$ an, für welche gilt

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}\,.$$

Falls Sie Teilaufgabe (a) nicht gelöst haben sollten, verwenden Sie für die nachfolgenden Teilaufgaben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ aus Teilaufgabe (a).

(d) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Matrix $\mathbf{A}$ aus Teilaufgabe (a).

(e) Die Abbildung $\mathcal{F}$ bildet den Kreis

$$K = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

auf die Menge $K' := \mathcal{F}(K) \subset \mathbb{R}^2$ ab. Berechnen Sie die Fläche von K'.
Hinweis: Die Rechnung ist sehr kurz!

3. Es seien die vier Punkte $A = (4, 3)$, $B = (3, 6)$, $C = (2, 1)$ und $D = (0, 6)$ gegeben, durch die ein Kreis gelegt werden soll. Die Koeffizienten a, b, c der Kreisgleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + ax_1 + bx_2 + c = 0$$

sollen im Sinne der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

(a) Stellen Sie das Gleichungssystem für a, b, c auf, das erfüllt wäre, wenn alle 4 Punkte auf einem Kreis liegen würden.

(b) Berechnen Sie den Residuenvektor $\mathbf{r}$ für $(a,\ b,\ c) = \frac{1}{283}(-805, -2097, 2346)$.

(c) Beschreiben Sie, wie Sie nachprüfen könnten, dass die Koeffizienten in (b) die Kleinste-Quadrate-Lösung des in (a) gefundenen Gleichungssystems darstellen. Das Einsetzen von Zahlenwerten ist nicht erforderlich.

(d) Liegt der Punkt A innerhalb oder ausserhalb des Kreises, der zur Kleinste-Quadrate-Lösung gehört?

4. (a) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei reellen Parametern α und β durch die augmentierte Matrix

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 17 & 5 & 13 & 0 & 2 \\ -11 & 8 & 9 & 4 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Geben Sie an, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

(i) genau eine,

(ii) mehr als eine,

(iii) gar keine

Lösung besitzt. Die Lösungen selbst müssen Sie nicht angeben.

(b) Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1+\mathrm{i})\, z_1 & - & 2\, z_2 & + & z_3 & = & 0 \\ (1-\mathrm{i})\, z_1 & + & 2\mathrm{i}\, z_2 & & & = & 8 \end{array}, \tag{1}$$

wobei i die komplexe Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Berechnen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems (1).

5. Wir wollen den Schnittpunkt x^* von $f(x) = \cos(\frac{x}{4})$ und $g(x) = \log(x)$ mithilfe der Fixpunktiteration bestimmen.

   (a) Zeichnen Sie den Graphen der beiden Funktionen und markieren Sie den Schnittpunkt.

   (b) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt x^* von $f(x)$ und $g(x)$ Lösung der Fixpunktgleichung

   $$x = F(x), \quad F(x) = \exp\left(\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right), \tag{2}$$

   ist.

   (c) Geben Sie die Fixpunktiteration für (2) an und berechnen Sie das Ergebnis der ersten Iteration x_1 für den Startwert $x_0 = 0$.

   (d) Zeigen Sie, dass die Fixpunktgleichung (2) im Intervall $I = [0, \pi]$ genau eine Lösung x^* hat und dass die Fixpunktiteration für beliebigen Startwert $x_0 \in I$ gegen diese Lösung x^* konvergiert. Verifizieren Sie dazu die Voraussetzungen für den Fixpunktsatz aus der Vorlesung.

6. Gegeben sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Spalten von $\mathbf{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

   (b) Berechnen Sie den ersten Schritt der **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumstrategie. Vergessen Sie nicht, zusätzlich zum veränderten Schema/Tableau die Matrix $\mathbf{L}_1$ und die Permutationsmatrix $\mathbf{P}_1$ für den ersten Schritt anzugeben.

   (c) Ist die **LR**-Zerlegung ohne Zeilen- oder Spaltenvertauschung anwendbar? Begründen Sie Ihre Antwort.