

Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Winter 2011

Prof. D. Stoffer

**Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.
Die Lösungswege müssen nachvollziehbar
dargestellt sein.**

1. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x - y &= 0 \\ -x + ay - z &= 0 \\ 4ax - y + az &= b\end{aligned}$$

mit den drei Unbekannten x, y, z und den beiden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau und führen Sie *einen* Eliminationsschritt des Gauss-Verfahrens durch. Wählen Sie dabei das Element in der ersten Spalte und zweiten Zeile als Pivot.
- b) Durch Weiterführung des Gauss-Verfahrens kann das Schema

-1	a	-1	0
0	$2a - 1$	-2	0
0	0	$a + 2$	b

erreicht werden. Bestimmen Sie für alle möglichen Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge.

2. Im \mathbb{R}^3 seien die drei Punkte A , B und C durch ihre Ortsvektoren $a = (2, 0, 0)^\top$, $b = (0, 1, 0)^\top$ bzw. $c = (0, 0, -1)^\top$ gegeben. Weiterhin sei α die Ebene, welche durch die drei Punkte A , B , C verläuft, und α_0 die zu α parallele Ebene durch den Nullpunkt.

- a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion \mathcal{P} des \mathbb{R}^3 auf die Ebene α_0 .
- b) Bestimmen Sie die Projektionen $\bar{a} = \mathcal{P}(a)$ und $\bar{b} = \mathcal{P}(b)$ von a bzw. b auf die Ebene α_0 .
- c) Bestimmen Sie $x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $x = (2, x_2, 0)^\top \in \alpha_0$.
- d) Stellen Sie x als Linearkombination $x = z_1\bar{a} + z_2\bar{b}$ von \bar{a} und \bar{b} dar.

3. a) Zeigen Sie, dass das Problem

$$H(\varepsilon) = \sqrt[3]{a + \varepsilon} - \sqrt[3]{a}$$

für $a \gg \varepsilon$ gut konditioniert ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Identität

$$u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2 + uv + v^2}.$$

- b) Bestimmen Sie H für $a = 1000$, $\varepsilon = \frac{1}{13 \cdot 10^9}$ auf 5 signifikante Ziffern genau. Vermeiden Sie dabei Auslöschung.
- c) Bestimmen Sie die Konditionszahl der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Die Grösse $Q = a + bx + cy$ wird für verschiedene Werte von x und y gemessen. Dabei ergeben sich die folgenden Messergebnisse.

x	-1	-1	1	1	1	0
y	0	-1	0	-1	1	1
Q	1	-2	5	1	9	7

Bestimmen Sie die Koeffizienten a , b und c nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

5. a) Approximieren Sie das Integral

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx$$

mittels der summierten Trapezregel, indem Sie das Integrationsintervall in 1, 2 bzw. 4 Teilintervalle aufteilen.

- b) Extrapolieren Sie Ihre Ergebnisse, um zu einer verbesserten Näherung \hat{I} an I zu gelangen.
- c) Bestimmen Sie die relativen Fehler der Integralnäherungen aus Teilaufgabe (a) sowie der extrapolierten Näherung \hat{I} gegenüber dem exakten Integralwert $I = \ln 3$ und vergleichen Sie diese miteinander.

6. Untersuchen Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen, d. h. alle Vektoren u , so dass $x(t) = u$ eine Lösung der Differentialgleichung darstellt.
- b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T sowie eine Diagonalmatrix D , so dass $T^{-1}AT = D$.
- c) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$, welche der Anfangsbedingung $x(0) = (-1, -1, 2)^\top$ genügt.

Hinweis: Als partikuläre Lösung können Sie eine der Gleichgewichtslösungen aus Teilaufgabe (a) verwenden.

Viel Erfolg!