Serie 6

1. Wir betrachten drei verschiedene Metallgemische M_1, M_2 and M_3, welche alle aus Kupfer, Silber und Gold in unterschiedlichen Verhältnissen zusammengesetzt sind. Die jeweilige prozentuale Zusammensetzung finden Sie in der unten abgebildeten Tabelle.

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Bestimmen Sie, in welchen Verhältnissen die Mischungen M_1, M_2 und M_3 gemischt werden müssen, um eine vierte Mischung M_4 zu erhalten, welche zusammengesetzt ist aus 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit geeigneter Matrix $\mathbf{A}$ und geeigneter rechten Seite $\mathbf{b}$ auf, um die Aufgabe zu lösen.

2. Lösen Sie die folgenden Aufgaben mithilfe der Gausselimination, wie sie im Algorithmus `gaussianelimination` in der Vorlesung vorgestellt worden ist.

a) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie den Rang von $\mathbf{A}$.
2. Sei $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, falls solche existieren.

b) Wir betrachten die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ k & 5 & -4 \end{pmatrix}$, wobei $k \in \mathbb{R}$ einen Parameter darstellt.

1. Bestimmen Sie den Rang von $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von k.
2. Sei $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie alle Lösungen $\mathbf{x}$ des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sofern welche existieren, in Abhängigkeit von k.

c) Wir betrachten $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit des Parameters $m \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie den Rang von $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von m.

Bitte wenden!

2. Sei $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m+1 \\ m \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie alle Lösungen $\mathbf{x}$ des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, sofern welche existieren, in Abhängigkeit von m.

3. Gegeben sei die $n \times n$-Tridiagonalmatrix $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ mit den Einträgen

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= -1 \qquad \text{for } i = 1, \dots, n-1, \\ a_{ii} &= 2 \qquad \text{for } i = 1, \dots, n, \\ a_{i,i-1} &= -1 \qquad \text{for } i = 2, \dots, n \end{aligned} \tag{1}$$

a) Geben Sie die Matrix $\mathbf{A}$ für $n = 4$ an. Finden Sie durch "manuelle Gausselimination" die Lösung $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wobei die rechte Seite $\mathbf{b}$ gegeben ist durch $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Schreiben Sie eine *effiziente* MATLAB-Funktion

`function x = SolverTridiag(b)`,

welche als Eingabe einen Spaltenvektor $\mathbf{b}$ nimmt und die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ als Spaltenvektor zurückgibt, wobei $\mathbf{A}$ die *dünnbesetzte* Matrix aus (1) ist.

Hinweis. Um das Gleichungssystem zu lösen können Sie den "Backslash"-Operator (mehr Infos unter `help \`) in MATLAB verwenden.

c) (Moderat schwierig) Sei $n \in \mathbb{N}$ nun eine beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten den Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n+1 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Lösung $\mathbf{x}$ des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Hinweis. Man kann auch zunächst MATLAB benutzen, um eine Idee zu bekommen, was die Lösung sein sollte.

d) (Schwierig!) Schreiben Sie eine weitere MATLAB-Funktion

`function x = LoopSolverTridiag(b)`,

welche als Eingabe den Spaltenvektor $\mathbf{b}$ nimmt und dazu die Lösung $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ berechnet, wobei $\mathbf{A}$ die Matrix aus (1) ist.

Dabei darf nun die Matrix $\mathbf{A}$ in keinerlei Format aufgestellt werden, sondern die Funktion muss realisiert werden nur unter Verwendung von Schleifen (z.B. `for`-Schleifen) oder Rekursionen.

Hinweis. Fortsetzung der Überlegungen aus Teilaufgabe **b**.

4. **a)** Nehmen Sie die 4×4-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Finden Sie durch "Gausselimination von Hand" die Lösung $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Es sei die $n \times n$-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_1 & & & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_{n-1} & c_{n-1} \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix}$ gegeben, wobei nicht niedergeschriebene Einträge den Wert 0 haben sollen. In anderen Worten

$$\begin{aligned} a_{ii} &= d_i, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n-1, \\ a_{n,i} &= c_i, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n, \\ a_{i,n} &= c_i, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n\ , \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $d_i \neq 0$ sind für $i = 1, \ldots, n-1$ und alle anderen Matrixeinträge verschwinden (sind gleich 0). Unter welcher Bedingung gibt es für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung?

Hinweis. Finden Sie die Zeilenstufenform der Matrix.

c) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function x = SpecialSolver(d, c, b)
```

welche als Eingabe die Zeilenvektoren **d** und **c** und **b** nimmt, wobei **b** und **c** gleiche Länge haben und **d** einen Eintrag mehr besitzt als **b** bzw. **c**.

Der Rückgabewert der MATLAB-Funktion soll die Lösung **x** des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sein (deren Existenz angenommen wird). Dazu soll die Matrix intern im Datenformat für dünnbesetzte Matrizen aufgestellt und anschliessend der \-Operator zur Lösung verwendet werden.

5. Berechnen Sie mit Hilfe der Algorithmus `gaussianelimination` aus der Vorlesung *Zeilenstufenform* des folgenden allgemeinen linearen 2×2-Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d, x_1, x_2, b_1$ und b_2 reelle Zahlen sind.

Hinweis. Fallunterscheidungen!

6. Bestimmen Sie Für jede der folgenden Teilmengen der Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich 7, also $\mathbb{P}_7$ ob sie linear unabhängig in $(\mathbb{P}_7, +, \cdot)$ sind oder nicht.

a) Die Menge $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ wobei

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x(x-1)\,, \\ p_2(x) &= x^2 - x^3 + 1\,, \\ p_3(x) &= x^4 + x^2\,. \end{aligned}$$

.

b) Die Menge $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ wobei

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x+1)(x-1)\,, \\ p_2(x) &= x(x+1)\,, \\ p_3(x) &= (x^3+1)(x^3-1)\,, \\ p_4(x) &= x-1\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Die Menge $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)\}$ wobei

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x(x+1)\,,\\
p_2(x) &= x^3+3x+1\,,\\
p_3(x) &= (x^2+1)(x^3+4)\,,\\
p_4(x) &= -3x+2x^3+2\,,\\
p_5(x) &= x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass sich etwa durch Verwendung der Basis $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^7\}$ eine Abbildung $\mathbb{P}_7 \to \mathbb{R}^8$ definieren laesst, die alle Vektorraumkonzepte treu abbildet und es erlaubt, im $\mathbb{R}^8$ zu rechnen. Siehe dazu Abschnitt 2.1 der Vorlesung. Auch Abschnitt 3.2.3 der Vorlesung ist nützlich.

7. Gegeben seien eine *invertierbare* Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, und zwei beliebige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, für die gelte

$$1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0\,.$$

Zeige, dass

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\,.$$

Hinweis. Machen Sie sich zuerst klar, wie man unter Berufung auf Satz 3.6.B nachweist, dass eine Matrix die Inverse einer anderen Matrix ist. Danach läuft die Lösung der Aufgabe auf ein ziemlich "mechanisches" Anwenden der Rechenregeln für das Matrixprodukt hinaus. Wichtig ist, dass man sieht, wann sich bestimmte Matrixprodukte auf blosse Zahlen reduzieren, denn dann lassen sie sich natürlich mit anderen Matrixprodukten vertauschen.

8. Gegeben seien zwei die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\3\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\7\\6 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Finden Sie die Koordinatentransformationsmatrix $\mathbf{S}$, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = 2\begin{pmatrix} 1\\-1\\2 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2\\3\\7 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2\\3\\6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 07.11.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.

Siehe nächstes Blatt!

- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13. Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen.

- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG