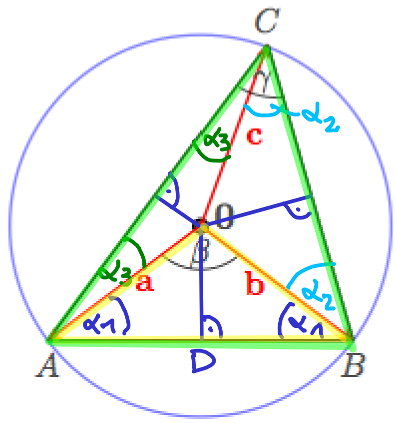
Lösung zu Serie 2

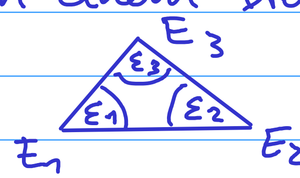
1. siehe Lösung Multiple-Choice.

2. (a)



Wir verwenden folgende Symmetrie - Argumente: Da die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ das Dreieck ABO die zwei Dreiecke OAD, BOD spiegelt, sind die Winkel in A resp. B gleich (α_1). Analog gilt dasselbe für die Dreiecke BCO, CAO, resp. Winkel α_2 und α_3.

Benutzen wir weiter, dass für Winkel in einem Dreieck $E_1E_2E_3$ gilt: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \pi$, erhalten wir:



1) $\beta + 2\alpha_1 = \pi \Leftrightarrow 2\alpha_1 = \pi - \beta$

2) $\gamma + (\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2) = \pi$

$\Leftrightarrow \gamma + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

Da $\gamma := \alpha_2 + \alpha_3$, erhalten wir durch einsetzen von 1) in 2):

$\gamma + \pi - \beta + (\alpha_2 + \alpha_3) = \pi$

$\Leftrightarrow 2\gamma = \beta$ $\square$

(b) Für diesen Beweis stellen wir fest, dass

- $\langle (\underline{a} - \underline{c}), (\underline{b} - \underline{c}) \rangle = \cos(\gamma) \|\underline{a} - \underline{c}\| \cdot \|\underline{b} - \underline{c}\|$
- $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \cos(\beta) \|\underline{a}\| \, \|\underline{b}\|$
- $\|\underline{a}\|^2 = \|\underline{b}\|^2 = \|\underline{c}\|^2 = r$

Daraus erhalten wir mit dem Hinweis auf dem Übungsblatt:

$$\cos(2\gamma) = 2\cos^2(\gamma) - 1$$
$$= 2\,\frac{\langle(\underline{a}-\underline{c}),(\underline{b}-\underline{c})\rangle^2}{\|\underline{a}-\underline{c}\|^2\cdot\|\underline{b}-\underline{c}\|^2} - 1 \qquad (4)$$

Zuerst vereinfachen wir den Term unter dem Bruchstrich:

- $\|\underline{a}-\underline{c}\|^2 = \langle \underline{a}-\underline{c}, \underline{a}-\underline{c}\rangle = \|\underline{a}\|^2 - 2\langle\underline{a},\underline{c}\rangle + \|\underline{b}\|^2$
  $= 2(r - \langle\underline{a},\underline{c}\rangle)$
- $\|\underline{b}-\underline{c}\|^2 = 2(r - \langle\underline{b},\underline{c}\rangle)$

Weiter gilt:

$$\langle(\underline{a}-\underline{c}),(\underline{b}-\underline{c})\rangle = \langle\underline{a},\underline{b}\rangle - \langle\underline{a},\underline{c}\rangle - \langle\underline{c},\underline{b}\rangle + \|\underline{c}\|^2$$
$$= r + \langle\underline{a},\underline{b}\rangle - \langle\underline{a},\underline{c}\rangle - \langle\underline{b},\underline{c}\rangle$$

Somit gilt
$$\begin{aligned}\left[\langle(\underline{a}-\underline{c}),(\underline{b}-\underline{c})\rangle\right]^2 = {} & r^2 + \langle\underline{a},\underline{b}\rangle^2 + \langle\underline{a},\underline{c}\rangle^2 + \langle\underline{b},\underline{c}\rangle^2 \\ & + 2r\cdot\langle\underline{a},\underline{b}\rangle - 2r\cdot\langle\underline{a},\underline{c}\rangle \\ & - 2r\cdot\langle\underline{b},\underline{c}\rangle - 2\langle\underline{a},\underline{b}\rangle\langle\underline{a},\underline{c}\rangle \\ & - 2\langle\underline{a},\underline{b}\rangle\langle\underline{b},\underline{c}\rangle \\ & + 2\langle\underline{a},\underline{c}\rangle\langle\underline{b},\underline{c}\rangle\end{aligned}$$

- $\|\underline{a}-\underline{c}\|^2\|\underline{b}-\underline{c}\|^2 = 4(r^2 - r\langle\underline{a},\underline{c}\rangle - r\langle\underline{b},\underline{c}\rangle + \langle\underline{a},\underline{c}\rangle\langle\underline{b},\underline{c}\rangle)$

Daraus folgt mit (4):

$$\begin{aligned}\cos(2\gamma) = \frac{2}{\|\underline{a}-\underline{c}\|^2\|\underline{b}-\underline{c}\|^2}\Big[& \cancel{r^2} + \langle\underline{a},\underline{b}\rangle^2 + \langle\underline{a},\underline{c}\rangle^2 + \langle\underline{b},\underline{c}\rangle^2 \\ & + 2\cdot r\cdot\langle\underline{a},\underline{b}\rangle - 2\cdot r\cdot\cancel{\langle\underline{a},\underline{c}\rangle} - 2\cancel{r\langle\underline{b},\underline{c}\rangle} \\ & - 2\langle\underline{a},\underline{b}\rangle\langle\underline{a},\underline{c}\rangle - 2\langle\underline{a},\underline{b}\rangle\langle\underline{b},\underline{c}\rangle \\ & + 2\cancel{\langle\underline{a},\underline{c}\rangle}\langle\underline{b},\underline{c}\rangle\end{aligned}$$

$$- \cancel{2}r^2 + 2r\cancel{\langle \underline{a}}, \underline{c}\rangle + 2r\cancel{\langle \underline{b}}, \underline{c}\rangle$$
$$-2\langle \underline{a}, \cancel{\underline{c}}\rangle\langle \underline{b}, \underline{c}\rangle \Big]$$

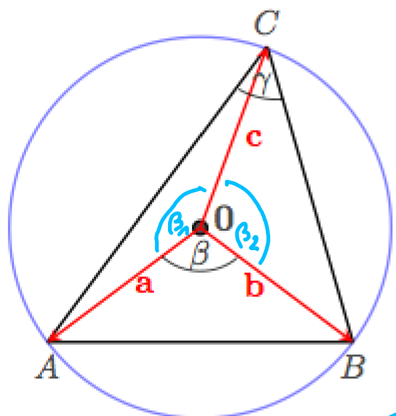
$$= \frac{2}{\|\underline{a}-\underline{c}\|^2\|\underline{b}-\underline{c}\|^2}\Big[\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 + \langle \underline{a},\underline{c}\rangle^2 + \langle \underline{b},\underline{c}\rangle^2 - r^2 + 2r\langle \underline{a},\underline{b}\rangle - 2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\big(\langle \underline{a},\underline{c}\rangle + \langle \underline{b},\underline{c}\rangle\big)\Big]$$

$$= \frac{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle}{r}\underbrace{\left[\frac{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 + \langle \underline{a},\underline{c}\rangle^2 + \langle \underline{b},\underline{c}\rangle^2 - r^2 + 2r\langle \underline{a},\underline{b}\rangle - 2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{b},\underline{c}\rangle - 2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{a},\underline{c}\rangle}{2r\langle \underline{a},\underline{b}\rangle - 2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{a},\underline{c}\rangle - 2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{b},\underline{c}\rangle + \frac{2}{r}\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{b},\underline{c}\rangle\langle \underline{a},\underline{c}\rangle}\right]}_{\stackrel{!}{=}1}$$

$$\Rightarrow \langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 + \langle \underline{a},\underline{c}\rangle^2 + \langle \underline{b},\underline{c}\rangle^2 - r^2 \stackrel{!}{=} \frac{2}{r}\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\langle \underline{b},\underline{c}\rangle\langle \underline{a},\underline{c}\rangle$$

$$\Leftrightarrow r^2\left(\cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1) + \cos^2(\beta_2) - 1\right) \stackrel{!}{=} 2r^2\cos\beta\cos\beta_1\cos\beta_2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1) + \cos^2(\beta_2) - 1 - 2\cos\beta\cos\beta_1\cos\beta_2 \stackrel{!}{=} 0$$



$$\Leftrightarrow \cos^2(\beta) + \cos^2(\beta_1) - \sin^2(\beta_2) - 2\cos\beta\cos\beta_1\cos\beta_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\beta_1 = 2\pi - (\beta + \beta_2)$$
$$\Rightarrow \cos(\beta_1) = \cos(\beta+\beta_2) = \cos(\beta)\cos(\beta_2) - \sin(\beta)\sin(\beta_2)$$

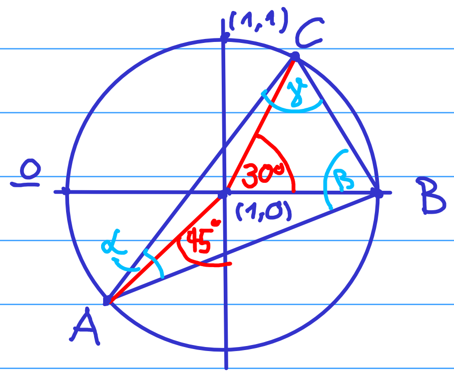
$$\Leftrightarrow \cos^2(\beta) + \cos^2(\beta)\cos^2(\beta_2) + \sin^2(\beta)\sin^2(\beta_2) - 2\cos(\beta)\cancel{\cos(\beta_2)\sin(\beta)}\sin(\beta_2)$$
$$- \sin^2(\beta_2) - 2\cos^2(\beta)\cos^2(\beta_2) + 2\cos(\beta)\cancel{\cos(\beta_2)}\sin(\beta)\sin(\beta_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\beta)\left(1 - \cos^2(\beta_2)\right) - \sin^2(\beta_2) + \sin^2(\beta)\sin^2(\beta_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\beta)\sin^2(\beta_2) + \sin^2(\beta)\sin^2(\beta_2) - \sin^2(\beta_2) = 0 \checkmark$$

$\square$

3.



$$A = -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir werden hier zuerst (b) lösen und (a) mithilfe der allgemeinen Form berechnen.

(b)(i) $\mathcal{S}_A$ können wir bestimmen, indem wir feststellen, dass $\frac{1}{2}(B+C)$ zum Mittelpunkt $M_{\overline{BC}}$ der gegenüber liegenden Seite $\overline{BC}$ zeigt: $\quad M_{\overline{BC}} = \frac{1}{2}(B+C)$

Die Seitenhalbierende $\mathcal{S}_A$ geht per Definition durch die Punkte A und $M_{\overline{BC}}$:

$$\mathcal{S}_A = \{A + \tau \cdot [\tfrac{1}{2}(B+C) - A] : \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Analog gilt für $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$:

$$\mathcal{S}_B = \{B + \tau \cdot [\tfrac{1}{2}(A+C) - B] : \tau \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{S}_C = \{C + \tau \cdot [\tfrac{1}{2}(A+B) - C] : \tau \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Die Höhe $\mathcal{H}_A$ erhalten wir, indem wir feststellen, dass sie senkrecht auf $\overline{CB}$ stehen und durch den Punkt A gehen muss:

Für die Normale $\underline{n}_A$, senkrecht auf $\overline{CB}$, muss gelten:

$$\underbrace{\langle \underline{n}_A, C-B \rangle}_{} = 0 \qquad (*)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} n_{A,1} \\ n_{A,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 - B_1 \\ C_2 - B_2 \end{pmatrix} \right\rangle = n_{A,1}(C_1-B_1) + n_{A,2}(C_2-B_2)$$

$\Rightarrow$ Wir wählen $\underline{n}_A = \begin{pmatrix} C_2 - B_2 \\ -(C_1 - B_1) \end{pmatrix}$, somit ist $(*)$ erfüllt.

$$\Rightarrow \mathcal{H}_A = \{ A + \tau \cdot \underline{n}_A : \tau \in \mathbb{R} \}$$

Analog erhalten wir für $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_C$:

$$\mathcal{H}_B = \{ B + \tau \cdot \underline{n}_B : \tau \in \mathbb{R} \}, \ \underline{n}_B = \begin{pmatrix} C_2 - A_2 \\ -(C_1 - A_1) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_C = \{ C + \tau \cdot \underline{n}_C : \tau \in \mathbb{R} \}, \ \underline{n}_C = \begin{pmatrix} A_2 - B_2 \\ -(A_1 - B_1) \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Winkelhalbierende $\mathcal{W}_A$ erhalten wir, indem wir feststellen, dass gilt

$$\left\langle \frac{B-A}{\|B-A\|}, \frac{C-A}{\|C-A\|} \right\rangle = \cos\alpha \qquad (\varepsilon 3)$$

und $\left\langle \frac{B-A}{\|B-A\|}, \underline{w}_A \right\rangle = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot |\underline{w}_A|$, $\left\langle \underline{w}_A, \frac{C-A}{\|C-A\|} \right\rangle = \cos\frac{\alpha}{2} |\underline{w}_A|$ (Δ)

gelten muss für den Richtungsvektor $\underline{w}_A$ der Winkelhalbierenden $\mathcal{W}_A$.

<u>Ansatz:</u> $\underline{w}_A := \frac{1}{2}\left(\frac{B-A}{\|B-A\|} + \frac{C-A}{\|C-A\|}\right)$, wobei

$$|\underline{W}_A| \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left|\frac{B-A}{\|B-A\|} + \frac{C-A}{\|C-A\|}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{\langle (B-A),(C-A)\rangle}{\|B-A\|\,\|C-A\|} + 1\right)}$$
$$\overset{(\text{ε3})}{=} \sqrt{1+\cos\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\left\langle \frac{B-A}{\|B-A\|}, \underline{W}_A \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\langle B-A, B-A\rangle}{\|B-A\|^2} + \left\langle \frac{B-A}{\|B-A\|}, \frac{C-A}{\|C-A\|}\right\rangle\right] \overset{(\text{ε3})}{=} \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$
$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos\frac{\alpha}{2}\,|\underline{W}_A|$$

$$\left\langle \underline{W}_A, \frac{C-A}{\|C-A\|}\right\rangle = \frac{1}{2}(\cos\alpha + 1) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot|\underline{W}_A|$$

Somit erfüllt $\underline{W}_A$ die Bedingungen (Δ)

$$\Rightarrow \mathcal{W}_A = \{A + \tau\cdot\underline{w}_A : \tau\in\mathbb{R}\}$$

Analog erhalten wir:

$$\mathcal{W}_B = \{B + \tau\cdot\underline{w}_B : \tau\in\mathbb{R}\},\quad \underline{w}_B := \frac{1}{2}\left(\frac{C-B}{\|C-B\|} + \frac{A-B}{\|A-B\|}\right)$$

$$\mathcal{W}_C = \{C + \tau\cdot\underline{w}_C : \tau\in\mathbb{R}\},\quad \underline{w}_C := \frac{1}{2}\left(\frac{B-C}{\|B-C\|} + \frac{A-C}{\|A-C\|}\right)$$

Beachten Sie, dass die Parameterdarstellung nicht eindeutig ist, die Mengen / Geraden jedoch schon.

(a) (i) Wir setzen die gegebenen Vektoren in die Geradengleichung von $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$ ein und erhalten:

$$\mathcal{S}_A = \left\{ -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} : \tau\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{S}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{S}_C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) $\mathcal{H}_A = \left\{ -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$ (siehe allgemeine Formel in 3(a)(ii)).

$$\mathcal{H}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{H}_C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) Basierend auf der allgemeinen Formel in 3(a)(iii) erhalten wir

$$\mathcal{W}_A = \left\{ -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \tau \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\frac{57}{36} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

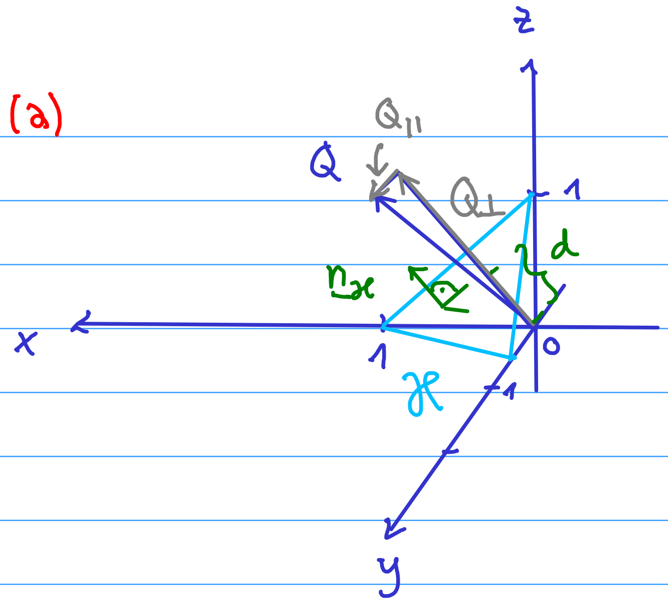
$$\|B - A\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4} + 1 + 2\sqrt{2} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$$

$$\|C - A\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{3}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{57}{36} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\mathcal{W}_B, \mathcal{W}_C$ erhalten wir analog.

4. (a)



$\underline{n}_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, Normalenvektor der Ebene $\mathcal{H}$ (normiert!)

$d \hat{=}$ Distanz der Ebene zum Ursprung $\underline{0}$

Es gilt $\langle d\cdot \underline{n}_{\mathcal{H}}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\rangle = 1$

$\Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{6}}$

<u>Idee:</u> Wir schreiben $Q = Q_{\perp} + Q_{\parallel}$, wobei $Q_{\perp}$ parallel zu $\underline{n}_{\mathcal{H}}$, genauer, die orthogonale Projektion von Q auf $\underline{n}_{\mathcal{H}}$ darstellt:

$$Q_{\perp} = \langle Q, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle \underline{n}_{\mathcal{H}}$$

$Q_{\parallel} = Q - \langle Q, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle \underline{n}_{\mathcal{H}}$ liegt in der Ebene $\mathcal{H}$.

Mithilfe dieser Aufteilung von Q lässt sich Q' einfach errechnen, indem wir bemerken, dass

$$Q' = Q - 2\cdot[Q_{\perp} - d\cdot \underline{n}_{\mathcal{H}}] = Q - 2[\langle Q, \underline{n}_{\mathcal{H}}\rangle - d]\,\underline{n}_{\mathcal{H}}$$

Somit bekommen wir

$$Q' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}}\left[\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right]\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) Wir haben die allgemeine Formel bereits in (a) bestimmt:

$$Q' = Q - 2[\langle Q, \underline{n}_{\mathcal{H}}\rangle - d]\,\underline{n}_{\mathcal{H}}, \text{ wobei}$$

$$\underline{n}_{\mathcal{H}} = \frac{h}{\|h\|}, \quad d = \frac{\beta}{\|h\|}.$$

(c) Wir erhalten g', indem wir q an $\mathcal{H}$ spiegeln und den Schnittpunkt von g mit $\mathcal{H}$ bestimmen (falls einer existiert)
Von diesem Schnittpunkt wissen wir, dass er fix bleibt:

1Fall: Der Schnittpunkt existiert, bzw.

$$\tau_1 \in \mathbb{R} : \langle \underline{q} + \tau_1 \underline{w}, \underline{h} \rangle = \beta$$

$$\Rightarrow g' = \{ \underline{q}' + \tau \underline{w}' : \tau \in \mathbb{R} \},$$

$$\underline{q}' = \underline{q} - 2[\langle \underline{q}, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle - d]\, \underline{n}_{\mathcal{H}} \quad (1)$$

$$\underline{w}' = \underline{q}' - (\underline{q} + \tau_1 \cdot \underline{w}) = 2[d - \langle \underline{q}, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle]\, \underline{n}_{\mathcal{H}} - \tau_1 \underline{w}$$

2Fall: Es gibt keinen Schnittpunkt, bzw.
für alle $\tau_1 \in \mathbb{R}$: $\langle \underline{q}, \underline{h} \rangle + \tau_1 \langle \underline{w}, \underline{h} \rangle - \beta = 0$

$\Rightarrow \langle \underline{w}, \underline{h} \rangle = 0$

$\Rightarrow \underline{w} \perp \underline{h}$, b.z.w $\underline{w} \perp \underline{n}_{\mathcal{H}}$.

Somit gilt für alle $\underline{p} \in g$; $\underline{p} = \underline{q} + \tau \underline{w}$, $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\underline{p}' \overset{\text{def}}{=} \underline{p} - 2[\langle \underline{p}, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle - d]\, \underline{n}_{\mathcal{H}}$$

$$= \underline{p} - 2[\langle \underline{q}, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle + \tau \underbrace{\langle \underline{w}, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle}_{=0} - d]\, \underline{n}_{\mathcal{H}}$$

$$= \underline{p} - 2[\langle \underline{q}, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle - d]\, \underline{n}_{\mathcal{H}}$$

$$= \underline{q}' + \tau \underline{w}, \text{ bzw.}$$

$g' = \{ q' + \tau \underline{w} \mid \tau \in \mathbb{R} \}$, q' aus Gleichung (1).

(i) Bew: 1Fall: Sei g, sodass 1Fall oben eintritt, dann ist $p_1 = q + \tau_1 \cdot \underline{w} \in g \cap g'$ $\lightning$

2Fall: Sei g, sodass 2.Fall eintritt. Dann ist $g' = \{ q' + \tau \underline{w} \mid \tau \in \mathbb{R} \}$. Es gilt

$$g \cap g' = \{ q + \tilde{\tau} \underline{w} \mid q + \tilde{\tau} \underline{w} = q' + \hat{\tau} \underline{w}, \text{ für } \tilde{\tau}, \hat{\tau} \in \mathbb{R} \}$$

$$q - q' = (\hat{\tau} - \tilde{\tau}) \underline{w}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2[\langle q, \underline{n}_{\varkappa} \rangle - d] \underline{n}_{\varkappa} = (\hat{\tau} - \tilde{\tau}) \underline{w}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{n}_{\varkappa} \parallel \underline{w} \text{ oder } \langle q, \underline{n}_{\varkappa} \rangle = d$$

Somit gilt $g \cap g' = \emptyset \Leftrightarrow \underline{n}_{\varkappa} \perp \underline{w}$ und $d \neq \langle q, \underline{n}_{\varkappa} \rangle$

Geometrisch bedeutet dies, dass $\underline{w}$ parallel zur Ebene verlaufen muss, jedoch q nicht in der Ebene selbst liegen darf, damit $g \cap g' = \emptyset$.

(ii) $g = g' \Leftrightarrow$ Für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\tilde{\tau} \in \mathbb{R}$ sodass

$$q + \tau \cdot \underline{w} = q' + \tilde{\tau} \cdot \underline{w}'$$

1Fall:
$$q + \tau \cdot \underline{w} = q - 2[\langle q, \underline{n}_{\varkappa} \rangle - d] \underline{n}_{\varkappa} + 2\tilde{\tau}([d - \langle q, \underline{n}_{\varkappa} \rangle] \underline{n}_{\varkappa} - \tau_1 \underline{w}]$$

$$\Leftrightarrow (\tau + 2\tau_1 \tilde{\tau})\, \underline{w} = -2(\langle q, n_{\mathcal{H}} \rangle - d)[1 - \tilde{\tau}]\, \underline{n}_{\mathcal{H}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{w} \parallel \underline{n}_{\mathcal{H}} \quad \text{oder} \quad \langle q, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle = d$$

Somit muss entweder gelten, dass g senkrecht zu $\mathcal{H}$ steht oder dass g vollständig in $\mathcal{H}$ liegt (q und $q_1 = q + \tau_1 \underline{w}$ liegen nun in $\mathcal{H}$, somit muss die ganze Gerade g in $\mathcal{H}$ liegen).

2. Fall: $q + \tau \cdot \underline{w} = q' + \tilde{\tau}\, \underline{w}$

$$\Leftrightarrow (\tau - \tilde{\tau})\, \underline{w} = -2(\langle q, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle - d)\, \underline{n}_{\mathcal{H}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{w} \parallel \underline{n}_{\mathcal{H}} \quad \text{oder} \quad d = \langle q, \underline{n}_{\mathcal{H}} \rangle$$

Beide Fälle treffen nach Annahmen für 2. Fall nie ein!

(d) Die Spiegelebene erhalten wir, indem wir feststellen, dass für

$\mathcal{S} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \underline{x}, \underline{s} \rangle = \alpha \}$ gelten muss: $P' = Q$ (0)

Wir haben:

$$P' \overset{b)}{=} P - 2[\langle P, \underline{n}_{\mathcal{S}} \rangle - d_s]\, \underline{n}_{\mathcal{S}} \quad , \quad d_s = \frac{\alpha}{\|\underline{s}\|}, \; \underline{n}_{\mathcal{S}} = \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} \quad (3)$$

aus (0) folgt:

$$0 = P' - Q = (P - Q) - 2\left[\langle P, \frac{\underline{s}}{\|s\|} \rangle - \frac{\alpha}{\|s\|}\right] \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|}$$

$$= (P - Q) - 2[\langle P, \underline{s} \rangle - \alpha] \frac{\underline{s}}{\|s\|^2}$$

$$(Q - P) = \overbrace{2\frac{[\alpha - \langle P, \underline{s} \rangle]}{\|\underline{s}\|^2}}^{\in \mathbb{R}}\, \underline{s}$$

$\Rightarrow \underline{s} \parallel (Q-P)$ oder $\cancel{Q=P}$ ← diesen Fall haben wir in der Aufgabenstellung ausgeschlossen.

wobei

$$\|\underline{s}\|^2\|Q-P\|^2 = 4[\alpha - \langle P, \underline{s}\rangle]^2 \quad (2)$$

Benutzen wir, dass $\underline{s} = \underbrace{\frac{\|\underline{s}\|}{\|Q-P\|}}_{=:\tau}(Q-P)$, erhalten wir:

$$\|\underline{s}\|\,\|Q-P\| = 4\,|\alpha - \tau\langle P, Q-P\rangle|$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(\|Q-P\|\|\underline{s}\| - 2[\alpha - \tau\langle P, Q-P\rangle]\right)\left(\|Q-P\|\|\underline{s}\| + 2[\alpha - \tau\langle P, Q-P\rangle]\right)$$

$\Rightarrow \|\underline{s}\|\,\|Q-P\| = 2\alpha + 2\tau\langle P, Q-P\rangle$ oder

$\|\underline{s}\|\cdot\|Q-P\| = 2\alpha - 2\tau\langle P, Q-P\rangle$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_\pm}{\|\underline{s}\|} = \frac{\|Q-P\|}{2} \pm \tau\langle P, Q-P\rangle = \frac{\|Q-P\|}{2} \pm \frac{1}{\|Q-P\|}\langle P, Q-P\rangle$$

Gleichung (3) gilt nur für α_+.

$$\Rightarrow \underline{s} = \tau\cdot\frac{(Q-P)}{\|Q-P\|}, \quad \alpha = \tau\cdot\left[\frac{\|Q-P\|}{2} + \frac{1}{\|Q-P\|}\langle P, Q-P\rangle\right],$$

$\tau \in \mathbb{R}$ beliebig.

- $\underline{0} \in S \Leftrightarrow \langle \underline{0}, \underline{s}\rangle = \alpha$

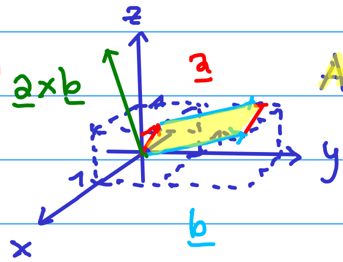
$\Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \|Q-P\|^2 = -2\langle P, Q-P\rangle$

$\Leftrightarrow \|Q\|^2 + \|P\|^2 - 2\cancel{\langle P, Q\rangle} = -2\cancel{\langle P, Q\rangle} + 2\|P\|^2$

$\Leftrightarrow \|Q\|^2 = \|P\|^2 \Leftrightarrow \|Q\| = \|P\|$

$\Leftrightarrow$ Der Abstand zum Ursprung muss für P und Q gleich sein.

5.(a)(i) $\underline{a}\times\underline{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot2\\1\cdot1-1\cdot1\\1\cdot2-1\cdot1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}}.$

(ii) 

$A \mathrel{\hat=}$ Fläche des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Es gilt: $A = \|\underline{a}\times\underline{b}\| \overset{(i)}{=} \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

(iii) $\underline{n}_{\mathcal{H}} = \underline{b}\times\underline{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot3-1\cdot2\\-1-1\cdot3\\1\cdot2+2\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}$

Oft wird $\underline{n}_{\mathcal{H}}$ normiert angegeben, da somit zumindest bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt.
(Jedes Element $\tau\cdot\underline{n}_{\mathcal{H}} \perp \mathcal{H}$) $\underline{n}_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

(b)(i) Wir berechnen rechte sowie linke Seite der Gleichung:

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \quad = \quad \text{Kommutativität.}$$

$$-\underline{b}\times\underline{a} = -\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}b_2a_3-b_3a_2\\b_3a_1-b_1a_3\\b_1a_2-b_2a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_3a_2-b_2a_3\\b_1a_3-b_3a_1\\b_2a_1-b_1a_2\end{pmatrix}$$

somit stimmt die Gleichung. $\square$

(ii) Sei $r\in\mathbb{R}$:

$$\underline{a}\times(r\cdot\underline{a}) = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}ra_1\\ra_2\\ra_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\cdot(ra_3)-a_3(ra_2)\\a_3(ra_1)-a_1(ra_3)\\a_1(ra_2)-a_2(ra_1)\end{pmatrix}$$

Kommutativität.

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{0}$$ $\square$

$$\text{(iii)}\quad (b\times c) = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a\times(b\times c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (c_3a_3 + a_1c_1)b_2 - (a_3b_3 + a_1b_1)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \end{pmatrix} \Bigg| \underbrace{\pm \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix}}_{\text{Wir addieren } 0.}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle b_1 - \langle \underline{a}; \underline{c} \rangle c_1 \\ \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle b_2 - \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle c_2 \\ \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle b_3 - \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \underline{b} - \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \underline{c} \qquad \square$$