Lösung Serie 7

1. siehe Lösung Multiple-Choice.

2. Wir werden zuerst den allgemeinen Fall (b) betrachten und durch Einsetzen danach den Fall (a) berechnen. Sei $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

(b)(i) Wir berechnen die Matrix $\underline{A} = \underline{u}\,\underline{v}^T = (u_i v_j)_{1 \le i,j \le n}$ (Δ)
und bemerken, dass wir schreiben können:
$\underline{A} = \begin{pmatrix} u_1 & \underline{v}^T \\ u_2 & \underline{v}^T \\ \vdots & \\ u_n & \underline{v}^T \end{pmatrix}$. Da $\underline{u} \neq \underline{0}$, gibt es mindestens ein $u_i \neq 0$,
und somit wird der Zeilenraum durch $\underline{v}$ aufgespannt,
$Z(\underline{A}) = \operatorname{span}(\underline{v})$.

(ii) Wir starten wieder bei (Δ), und bemerken, dass auch gilt

$$\underline{A} = \left(v_1 \underline{u},\, v_2 \underline{u},\, \dots,\, v_n \underline{u} \right). \qquad (1)$$

Da gilt $\underline{v} \neq \underline{0}$, gibt es mindestens ein $v_i \neq 0$.
Somit wird der Spaltenraum aufgespannt durch $\underline{u}$,
$S(\underline{A}) = \operatorname{span}(\underline{u})$.

(iii) Unter Verwendung von i) erhalten wir

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} u_1 \underline{v}^T \\ \vdots \\ u_n \underline{v}^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_i \underline{v}^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{\tilde{v}}^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es gibt ein $u_i \neq 0$

$\underline{\tilde{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$, mit $\tilde{v}_i = \begin{cases} 0 & i < i_0 \\ 1 & i = i_0 \\ \frac{v_i}{v_{i_0}} & i > i_0 \end{cases}$, wobei $i_0 = \min\{ i \in \{1, \dots, n\} : v_i \neq 0 \}$

(kleinster Index, sodass $v_i \neq 0$)

Wir wissen, dass $i_0 \leq n$, somit gilt

$$\underline{A} \sim \begin{pmatrix} 0 \cdots \overset{\swarrow i_0 \leq n}{1} & * \\ & \bigcirc \end{pmatrix}$$

(2) Zeilenstufenform

(iv) Aus (2) folgt direkt: $\text{Rang}(\underline{A}) = 1$

Da gilt $\text{Bild}(\underline{A}) = S(\underline{A})$, erhalten wir aus (1):

$$\text{Bild}(\underline{A}) = \text{span}(\underline{u})$$

(v) $\text{Kern}(\underline{A}) \overset{\text{Def.}}{=} \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{A}\,\underline{x} = \underline{0} \}$

$$\overset{\text{Def} \underline{A}}{=} \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \boxed{\underbrace{\underline{u}}_{\neq \underline{0}} \underbrace{\underline{v}^T \underline{x}}_{= \langle \underline{v}, \underline{x} \rangle \text{ Skalar}} = \underline{0}} \} \quad \Longleftrightarrow \langle \underline{v}, \underline{x} \rangle = 0$$

$$= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{v}, \underline{x} \rangle = 0 \}$$

Somit gilt $\underline{a} = \underline{v}$.

(vi) Folgt direkt aus (iv): Eine Basis von $\text{Bild}(\underline{A})$ ist $\mathcal{B} = \{\underline{u}\}$.

(a) (i) $Z(\underline{A}) = \text{span}(\underline{v}) = \text{span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(ii) $S(\underline{A}) = \text{span}(\underline{u}) = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(iii) $\underline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (i_0 = 1)$

(iv) $\text{Rang}(\underline{A}) = 1, \quad \text{Bild}(\underline{A}) = \text{span}(\underline{u}) = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(v) $\text{Kern}(\underline{A}) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \}$,

bzw $\underline{a} = \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(vi) Basis vom $\text{Bild}(\underline{A})$: $\mathcal{B} = \{\underline{u}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

3. $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{B} := [\underline{A}, \underline{b}] \in \mathbb{R}^{n,m+1}$

(a) $\underline{A} = [\underline{b}, \overbrace{\underline{0}, \dots, \underline{0}}^{m-1}]$, $\underline{b}, \underline{0} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \underline{B} = [\underline{b}, \underline{0}, \dots, \underline{0}, \underline{b}]$

$\Rightarrow \quad S(\underline{B}) = \operatorname{span} \underline{b} = S(\underline{A})$

Konkretes Beispiel: $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Somit gilt $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{B} = [\underline{A}, \underline{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Für $\underline{A} = [\underline{c}, \underline{0}, \dots, \underline{0}]$, $\underline{c}, \underline{0} \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, mit $\underline{b}$ linear unabhängig von $\underline{c}$, gilt: $\underline{B} = [\underline{A}, \underline{b}]$ hat Spaltenraum $S(\underline{B}) = \operatorname{span}\{\underline{b}, \underline{c}\} \underset{\uparrow}{\supsetneq} \operatorname{span}\{\underline{c}\} = S(\underline{A})$

$\underline{b}, \underline{c}$ linear unabhängig.

Konkretes Beispiel: $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, und somit

$\underline{A} = [\underline{c}, \underline{0}, \underline{0}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = [\underline{c}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S(\underline{A}) = \operatorname{span}(\underline{b}) = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \subsetneq \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = S(\underline{B})$

Der Spaltenraum von $\underline{B}$ ist somit um eine Dimension grösser als $S(\underline{A})$.

(c) Damit $S(\underline{A}) \subsetneq S(\underline{B})$, muss gelten $\underline{b} \notin S(\underline{A})$, d.h. $\underline{b}$ darf nicht im Span der Spaltenvektoren $\operatorname{span}\{\underline{A}(:,1), \dots, \underline{A}(:,m)\}$ liegen. Es muss also gelten, dass $\underline{b}$ linear unabhängig von

$\{\underline{A}(:,1), \ldots, \underline{A}(:,m)\}$, was gleichbedeutend ist mit
$\underline{b} = \lambda_1 \underline{A}(:,1) + \ldots + \lambda_m \underline{A}(:,m) = \underline{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ besitzt
keine Lösung für $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

4.(a) Gegeben ist $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, <u>invertierbar</u>,
$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$

Wichtig für diese Aufgabe ist die Definition "linearer Unabhängigkeit":
$\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig bedeutet:

$$\lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{w}_k = \underline{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0 \quad (3)$$

<u>Zu zeigen ist:</u> (i) $\{\underline{A}\underline{v}_1, \ldots, \underline{A}\underline{v}_k\}$ ist linear unabhängig.
$\Longleftrightarrow$ (ii) $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ linear unabhängig.

Die Menge $\{\underline{A}\underline{v}_1, \ldots, \underline{A}\underline{v}_k\}$ ist linear unabhängig sofern (3) gilt für $w_i = A v_i$, $i = 1, \ldots, k$:

$$\boxed{\boxed{\lambda_1 \underline{A}\underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{A}\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{A}\underline{v}_k = \underline{0}}_{(4)} \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0} \quad (5)$$

Im Folgenden formen wir (4) um:

$$\Longleftrightarrow [\underline{A}\underline{v}_1, \underline{A}\underline{v}_2, \ldots, \underline{A}\underline{v}_k] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\Longleftrightarrow A \cdot [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (6)$$

Da A invertierbar ist, können wir beide Seiten der Gleichung (6) mit der Inversen A^{-1} multiplizieren:

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{A}}_{=\underline{I}_n}[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix} = \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{0}}_{=\underline{0}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix} = \underline{0}} \qquad (7)$$

Somit können wir in Gleichung (5) den Teil (4) ersetzen durch (7) und erhalten die äquivalente Aussage:

$$\boxed{\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0},$$

was per Definition bedeutet (siehe (3))

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ sind linear unabhängig.

$\square$

(b) Gegeben ist $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, invertierbar.

Per Definition gilt: $\quad \text{Kern}(\underline{B}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{B}\,\underline{x} = \underline{0}\}$

bzw. $\quad \boxed{\text{Kern}(\underline{A}\,\underline{B}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \boxed{\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{x} = \underline{0}}_{(9)}\}} \qquad (8)$

Wir formen (8) um, indem wir verwenden, dass $\underline{A}$ invertierbar ist, wir also beide Seiten der Gleichung (9) mit $\underline{A}^{-1}$ multiplizieren können:

$$\begin{aligned}
\text{Kern}(\underline{A}\,\underline{B}) &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{x} = \underline{0}\} \\
&= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{A}}_{=\underline{I}_n}\underline{B}\,\underline{x} = \underbrace{\underline{A}^{-1}\underline{0}}_{=\underline{0}}\} \\
&= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{B}\,\underline{x} = \underline{0}\} \overset{\text{Def}}{=} \text{Kern}(\underline{B})
\end{aligned}$$

$\square$

5. Gegeben sind $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

(a) <u>Zu zeigen</u>: $\text{Bild}(\underline{A}\underline{B}) \subseteq \text{Bild}(\underline{A})$

<u>Beweis</u>:

$$\text{Bild}(\underline{A}\underline{B}) = \text{span}\{(\underline{A}\cdot\underline{B})(:,1), \ldots, (\underline{A}\cdot\underline{B})(:,n)\}$$
$$= \text{span}\{\underline{A}[\underline{B}(:,1)], \underline{A}[\underline{B}(:,2)], \ldots, \underline{A}[\underline{B}(:,n)]\}$$

[Die Vektoren $\underline{B}(:,1), \ldots, \underline{B}(:,n)$ liegen in $\mathbb{R}^n$, somit gilt $\underline{B}(:,1), \ldots, \underline{B}(:,n) \in \text{span}\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$, wobei $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ darstellt:]

$$\subseteq \text{span}\{\underline{A}\,\underline{e}_1, \underline{A}\,\underline{e}_2, \ldots, \underline{A}\,\underline{e}_n\}$$
$$= \text{span}\{\underline{A}(:,1), \ldots, \underline{A}(:,n)\}$$
$$= \text{Bild}(\underline{A})$$

$\Rightarrow \text{Bild}(\underline{A}\underline{B}) \subseteq \text{Bild}(\underline{A})$ $\square$

(b) <u>Zu zeigen</u>: $\text{Rang}(\underline{A}\underline{B}) \leq \text{Rang}(\underline{A})$

<u>Beweis</u>: Per Definition gilt

$$\boxed{\text{Rang}(\underline{A}\underline{B}) = \dim \text{Bild}(\underline{A}\underline{B}) = \dim \underbrace{S}_{\text{Spaltenraum}}(\underline{A}\underline{B}) = \dim \underbrace{Z}_{\text{Zeilenraum}}(\underline{A}\underline{B})} \quad (10)$$

Da wir aus (a) wissen, dass gilt

$\text{Bild}(\underline{A}\underline{B}) \subseteq \text{Bild}(\underline{A})$,

erhalten wir mit (10) sofort:

$$\text{Rang}(\underline{A}\underline{B}) \overset{(10)}{=} \dim \text{Bild}(\underline{A}\underline{B}) \overset{(a)}{\leq} \dim \text{Bild}(\underline{A}) \overset{\text{Def}}{=} \text{Rang}(\underline{A})$$

$\Rightarrow \text{Rang}(\underline{A}\underline{B}) \leq \text{Rang}(\underline{A})$ $\square$

(c) <u>Zu zeigen</u>: $\text{Rang}(\underline{B}^T\underline{A}^T) \leq \text{Rang}(\underline{A}^T)$

<u>Beweis</u>: $\text{Rang}(\underline{B}^T\underline{A}^T) = \text{Rang}((\underline{A}\underline{B})^T) \overset{\text{Def Rang}}{=} \dim \text{Bild}[(\underline{A}\underline{B})^T]$

$$\overset{\text{def Bild}}{=} \dim \underbrace{S}_{\text{Spalten-Raum}}((\underline{A}\underline{B})^T)$$

Aufgrund der Definition der Transponierten gilt:

$$\underset{\uparrow\,\text{Spaltenraum}}{S}\left((\underline{A}\underline{B})^T\right) = \underset{\uparrow\,\text{Zeilenraum}}{Z}(\underline{A}\underline{B}) \qquad (11)$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\text{Rang}(\underline{B}^T \underline{A}^T) &= \dim S\left((\underline{A}\underline{B})^T\right) \overset{(11)}{=} \dim Z(\underline{A}\underline{B}) \\
&\overset{\text{Def Rang (10)}}{=} \text{Rang}(\underline{A}\underline{B}) \overset{(b)}{\leq} \text{Rang}(\underline{A}) \\
&\overset{\text{Def Rang (10)}}{=} \dim S(\underline{A}) \\
&= \dim Z(\underline{A}^T) \\
&\overset{\text{Def Rang (10)}}{=} \text{Rang}(\underline{A}^T).
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \text{Rang}(\underline{B}^T \underline{A}^T) \leq \text{Rang}(\underline{A}^T)$$

$\square$

(d) Es gilt: $\underline{A}\underline{B} = \underline{I}_n \qquad (12)$

<u>zu zeigen:</u> $\text{Rang}\, \underline{A} = n$

<u>Beweis:</u> Wir verwenden (b):

$$\begin{aligned}
n = \dim \mathbb{R}^n &= \dim \text{span}\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} \\
&= \dim \text{span}\{\underline{I}_n(:,1), \dots, \underline{I}_n(:,n)\} \\
&= \dim \text{Bild}\, \underline{I}_n \\
&\overset{(12)}{=} \dim \text{Bild}\,(\underline{A}\underline{B}) = \text{Rang}\,(\underline{A}\underline{B}) \\
&\overset{(b)}{\leq} \text{Rang}(\underline{A}) \leq n
\end{aligned}$$

$$\left[\underline{A}(:,1), \dots \underline{A}(:,n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \text{Bild}\, \underline{A} \leq n\right]$$

$$\Rightarrow \text{Rang}\, \underline{A} = n.$$

6. (a) $\mathcal{D} = \{ \underline{A} = \{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n,n} : a_{ij} = 0 \text{ falls } i \neq j \}$

$$= \{ \operatorname{diag}([a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]) : a_{ii} \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\} \}$$

1. $\mathcal{D} \subset \mathcal{M} = \mathbb{R}^{n,n}$ Unterraum:

Es gilt für $\underline{A} = \operatorname{diag}[a_{11}, \dots, a_{nn}]$, $\underline{B} = \operatorname{diag}[b_{11}, \dots, b_{nn}] \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\underline{A} + \lambda \underline{B} = \operatorname{diag}[a_{11} + \lambda b_{11}, \dots, a_{nn} + \lambda b_{nn}] \in \mathcal{D},$$

somit bildet $\mathcal{D} \subset \mathcal{M} = \mathbb{R}^{n,n}$ einen Unterraum von $\mathcal{M}$.

2. Basis von $\mathcal{D}$:

Die Matrizen $\underline{E}_{11} = \operatorname{diag}[1, 0, \dots, 0]$, $\underline{E}_{22} = \operatorname{diag}[0, 1, 0, \dots, 0]$, $\dots$, $\underline{E}_{nn} = \operatorname{diag}[0, \dots, 0, 1]$ aus $\mathcal{D}$ spannen offensichtlich den ganzen Unterraum $\mathcal{U}$ auf:

$$\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\underline{E}_{11}, \dots, \underline{E}_{nn}\} \qquad (13)$$

Sie sind sogar linear unabhängig, da gilt

$$\lambda_1 \underline{E}_{11} + \dots + \lambda_n \underline{E}_{nn} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und somit

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (= \underline{0}) \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.} \qquad (14)$$

Aus (13) und (14) folgt per Definition, dass

$\{\underline{E}_{11}, \dots, \underline{E}_{nn}\}$ eine Basis von $\mathcal{U}$ bilden.

Die Dimension von $\mathcal{U}$, also die Anzahl der Basismatrizen ist somit $\dim \mathcal{U} = n$.

b) $\mathcal{R} = \{ \underline{A} = \{a_{ij}\}_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n,n} : \quad a_{ij} = 0$ für alle $i>j\}$

1. $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ Unterraum:

Für $\underline{A} = \{a_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$, $\underline{B} = \{b_{ij}\}_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$\underline{C} = \underline{A} + \lambda \underline{B} = \{a_{ij} + \lambda b_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$, wobei

$$c_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij} = 0 \quad \text{für } i>j,$$

da $a_{ij} = b_{ij} = 0$ für $i>j$.

2. Basis von $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$:

Für $i,j \in \{1,..,n\}$ sei $\underline{E}_{ij} = \{e_{kl}\}_{1\le k,l\le n}$ definiert durch

$$e_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i \text{ und } l=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Behauptung: $\mathcal{B} := \{\underline{E}_{ij} : i\le j \text{ und } i,j\in\{1,\dots,n\}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}$.

Beweis: ▸ $\operatorname{span} \mathcal{B} = \mathcal{R}$:

Per Definition gilt, dass $\boxed{\mathcal{B}\subset\mathcal{R}}$. Weiter gilt für jedes $\underline{A}\in\mathcal{R}$ per Definition $a_{ij} = 0$ für $i>j$. Somit besitzt $\underline{A}$ nur nicht-null Einträge für $i\le j$, es gilt also

$$\underline{A} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{n} a_{ij}\,\underline{E}_{ij} \in \operatorname{span}\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{R} \subset \operatorname{span}\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\mathcal{B} = \mathcal{R}$$

- Es bleibt zu zeigen, dass B linear unabhängig ist:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\le j}}^{n} \lambda_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_{ij} = 0 \text{ für } i \le j.$$

$\square$

Die Dimension von $\mathcal{R}$ ist also gleich der "Anzahl Basismatrizen"

$\dim \mathcal{R} = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) $\mathcal{S} = \{ \underline{A} = \{a_{ij}\}_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n,n} : a_{ij} = a_{ji} \text{ für alle } 1 \le i,j \le n \}$

1) $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Unterraum:

Seien $\underline{A}, \underline{B} \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$\underline{C} = \underline{A} + \lambda \cdot \underline{B} = \{ a_{ij} + \lambda b_{ij} \}_{1\le i,j\le n}$. Aufgrund der Definition von $\mathcal{S}$, gilt:

$$c_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij} \overset{\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \\ b_{ij} = b_{ji} \end{cases}}{=} a_{ji} + \lambda b_{ji} \overset{\text{Def } \underline{C}}{=} c_{ji}$$

$\Rightarrow \underline{C} \in \mathcal{S}$. Somit ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ ein Unterraum.

2) Basis of $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$:

Zuerst führen wir geeignete Matrizen ein, für $i \le j$ $(i,j \in \{1,..n\})$

$\underline{S}_{ij} = \{ s_{kl} \}_{1\le k,l\le n}$, wobei $s_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i \text{ und } l=j \\ 1 & k=j \text{ und } l=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Sei $B := \{ \underline{S}_{ij} : i \le j,\ i,j \in \{1,\ldots,n\}\}$.

Behauptung: B ist Basis von $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$:

- Sicherlich gilt $\boxed{B \subset \mathcal{S}}^{(*)}$, da die einzigen nicht-null-Einträge von $\underline{S}_{ij}$ $s_{ij} = s_{ji}$ sind.

 Weiter gilt $\operatorname{span} B \supset \mathcal{S}$, da für $\underline{A} \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\underline{A} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{n} a_{ij}\, S_{ij} \in \operatorname{span} B.$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{S} \subset \operatorname{span} B$ und wegen $(*)$ gilt $\operatorname{span} B \subset \mathcal{S}$.

$\Rightarrow \quad \mathcal{S} = \operatorname{span} B.$

- Es bleibt zu zeigen, dass B linear unabhängig ist:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{n} \lambda_{ij}\, S_{ij} = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, \quad \text{wobei} \quad c_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & i \leq j \\ \lambda_{ji} & i > j \end{cases}$$

Somit gilt

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{n} \lambda_{ij}\, S_{ij} = \underline{0} \iff c_{ij} = 0 \text{ für alle } i,j \in \{1,\dots,n\}$$

$$\iff \lambda_{ij} = 0 \text{ für alle } i \leq j,\ i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

$\square$

Die Dimension von $\mathcal{S}$ erhalten wir analog zu (b) über die Anzahl der Basisvektoren:

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}.$$