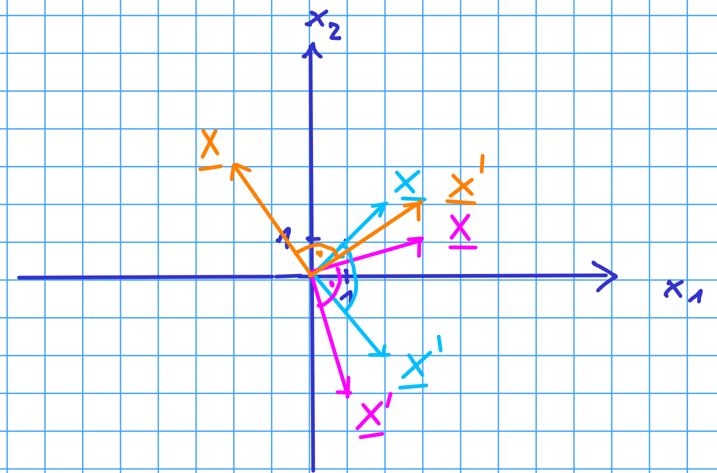
Lösung Serie 9

1.&2. siehe Lösung Multiple-Choice.

3. Gegeben ist $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \underline{x}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

(a)



Die Abbildung F dreht den Punkt $\underline{x}$ um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung $\underline{0}$.

(b) Zu zeigen ist: Für $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(\underline{x} + \alpha \underline{y}) = F(\underline{x}) + \alpha F(\underline{y})$$

Beweis:

$$\underline{z} := \underline{x} + \alpha \underline{y} \overset{\text{Definition skalare Multiplikation und Vektoraddition}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(\underline{x} + \alpha \underline{y}) &= F\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. F}}{=} \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} x_2 + \alpha y_2 \\ -x_1 - \alpha y_1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Def. skal. Mult \& Vektoradd.}}{=} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Def. F}}{=} F(\underline{x}) + \alpha F(\underline{y}) \end{aligned}$$

$\square$

(c) Um die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ zu erhalten, berechnen wir die Bilder aller Kartesischen Basisvektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$ und drücken diese als Linearkombination der Kartesischen Basisvektoren aus (vergleiche Gleichung (4.2.C) aus Vorlesung):

$$F(\underline{e}_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \underline{e}_1 + (-1)\,\underline{e}_2 \overset{!}{=} a_{11}\,\underline{e}_1 + a_{21}\,\underline{e}_2$$

$$F(\underline{e}_2) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 \overset{!}{=} a_{12}\,\underline{e}_1 + a_{22}\,\underline{e}_2$$

Wir erhalten somit

$$\underline{\underline{\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

4. (a) siehe Vorlesungsunterlagen.

(b) <u>Zu zeigen ist</u>: Für $\underline{p}, \underline{r} \in \mathbb{P}_d$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(\underline{p} + \alpha \underline{r}) = F(\underline{p}) + \alpha F(\underline{r})$$

Beweis: Sei $\underline{s}(x) := \underline{p}(x) + \alpha\, \underline{r}(x) \in \mathbb{P}_d$.

$$\begin{aligned}
F([\underline{p} + \alpha \underline{r}](x)) &= F(\underline{s}(x)) \overset{\text{Def } F}{=} (x-1)\,\underline{s}'(x) \\
&= (x-1)\,(\underline{p} + \alpha \underline{r})'(x) \\
&\overset{\text{Linearität Ableitung}}{=} (x-1)\,[\underline{p}' + \alpha \underline{r}'](x) \\
&\overset{\text{Distributivität Mult. zweier Polynome}}{=} (x-1)\,\underline{p}'(x) + \alpha(x-1)\,\underline{r}'(x) \\
&\overset{\text{Def } F}{=} F(\underline{p}(x)) + \alpha F(\underline{r}(x)) \qquad \square
\end{aligned}$$

(c) Wir gehen Analog zu 3(c) vor:

1) Wir bestimmen die Bilder der Monombasis von $\mathbb{P}_d$:

$$\{\underline{p}_1(x) = 1,\ \underline{p}_2(x) = x,\ \underline{p}_3(x) = x^2, \dots, \underline{p}_{d+1}(x) = x^d\}:$$

$$F(\underline{p}_1(x)) = (x-1) \cdot \underbrace{\underline{p}_1'(x)}_{=0,\ \text{da konstant}} = 0$$

$$
\left.\begin{aligned}
F(p_2(x)) &= (x-1)\cdot p_2'(x) = (x-1)\, p_1(x) \\
F(p_3(x)) &= (x-1)\, p_3'(x) = (x-1)\, 2\, p_2(x) \\
&\vdots \\
F(p_{d+1}(x)) &= (x-1)\, p_{d+1}'(x) = (x-1)\, d \cdot p_d(x)
\end{aligned}\right\} (2)
$$

2) Wir erhalten die Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(d+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(d+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(d+1)1} & a_{(d+1)2} & \cdots & a_{(d+1)(d+1)} \end{pmatrix}$,

durch Koeffizientenvergleich (siehe Gleichung (4.2.c) der Vorlesungsunterlagen):

$$F(p_j(x)) = \sum_{\ell=1}^{d+1} a_{\ell j}\, p_\ell(x) \qquad j = 1, \dots, d+1$$

$$
\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}
\begin{cases}
0 = \sum_{\ell=1}^{d+1} a_{\ell 1}\, p_\ell(x) \\
p_2(x) - p_1(x) = (x-1)p_1(x) = \sum_{\ell=1}^{d+1} a_{\ell 2}\, p_\ell(x) \\
\vdots \\
d p_{d+1}(x) - d p_d(x) = (x-1)\, d\, p_d(x) = \sum_{\ell=1}^{d+1} a_{\ell (d+1)}\, p_\ell(x)
\end{cases}
$$

$$
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
a_{12} = -1, & a_{22} = 1 \\
a_{23} = -2, & a_{33} = 2 \\
\vdots \\
a_{d(d+1)} = -d, & a_{(d+1)(d+1)} = d \\
a_{ij} = 0 & \text{sonst}
\end{cases}
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad a_{ij} = \begin{cases} -i & i = j-1 \\ i-1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad i,j \in \{1, \dots, d+1\}
$$

Somit gilt: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 2 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & d-1 & -d \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}$

5. (a) $\underline{x}^n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$, wobei $\boxed{F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}}$

$$\rightsquigarrow \underline{x}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+1} + F_n \end{pmatrix}}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$=: H\left(\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}\right) = H\left(\underline{x}^n\right)$$

(b) Wir gehen vor wie in Aufgabe 3.(c):

$$H(\underline{e}_1) = H\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \underline{e}_1 + 1 \cdot \underline{e}_2 \overset{!}{=} a_{11}\underline{e}_1 + a_{21}\underline{e}_2$$

$$H(\underline{e}_2) = H\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{e}_1 + 1 \cdot \underline{e}_2 \overset{!}{=} a_{12}\underline{e}_1 + a_{22}\underline{e}_2$$

Koeffizienten-Vergleich

$$\Rightarrow \underline{\underline{\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

6. Alle linearen Abbildungen bilden den Nullvektor des Definitionsraums / Urbildraums immer auf den Nullvektor des Bildraumes ab.

Dies folgt direkt aus (L1) von Def 4.1.A der Vorlesung:

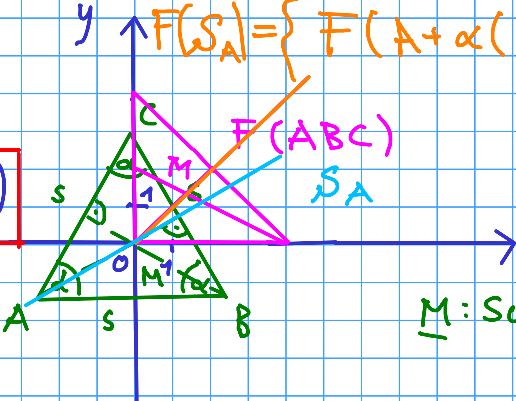
$$\begin{cases} \underbrace{F(\underline{0} + \underline{0})}_{= F(2\underline{0}) = F(\underline{0})} \overset{(L1)}{=} F(\underline{0}) + F(\underline{0}) = 2F(\underline{0}) \\ \Leftrightarrow F(\underline{0}) = 2F(\underline{0}) \Leftrightarrow F(\underline{0}) = \underline{0} \end{cases}$$

Deshalb gilt für F

$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also

(3) $\boxed{F(\underline{M}) = \underline{M} \quad \text{(Fixpunkt)}}$

$F(S_A) = \{ F(A + \alpha(M - A)) : \alpha \in \mathbb{R} \}$



$\underline{M}$: Schwerpunkt

Es soll weiter gelten, dass einer der Eckpunkte $\underline{A}, \underline{B}$ oder $\underline{C}$ auf $\underline{0}$ abgebildet wird.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (einfaches Umbenennen der Eckpunkte führt dazu) können wir den Eckpunkt $\underline{A}$ verwenden.

(4) $\boxed{F(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Variante 1:

Somit gilt $F(\mathcal{S}_A) = \{ (\alpha(F(M) - F(A)) + F(A)) : \alpha \in \mathbb{R} \} \overset{(3)+(4)}{=} \underline{0} \Rightarrow F(ABC)$ ist entartet!

Variante 2:

Da ABC gleichseitiges Dreieck ist, gilt: $\underline{A} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Somit gilt $\operatorname{span}\{A\} \subset \operatorname{Kern}(F)$, bzw.
$\dim \operatorname{Kern}(F) \geq 1$
Mithilfe der Dimensionsformel gilt folglich:
$\dim(\operatorname{Bild} F) = \underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{=2} - \underbrace{\dim(\operatorname{Kern}(F))}_{\geq 1} \leq 1$

$\Rightarrow$ Bild F liegt auf einer Gerade im $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow F(ABC) \subset \operatorname{Bild} F$ kann nur entartet sein! $\square$

7. (a) siehe Vorlesungsunterlagen.
(b) Basiswechsel von $\mathbb{R}^3$ als Definitionsraum

$$\mathcal{E}\,(\text{neu}) \xrightarrow{S} \mathcal{B}\,(\text{alt})$$

d.h. wir stellen die neue Basis durch die alte Basis dar:

geschicktes Hinsehen oder Lösen lin. GLS

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S_{11} = 1, \; S_{21} = S_{31} = 0$

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S_{12} = -1, \; S_{22} = 1, \; S_{32} = 0$

3) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = s_{13}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s_{23}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s_{33}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow s_{13}=0,\ s_{23}=-1,\ s_{33}=1$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

(c) Basiswechsel von $\mathbb{R}^3$ als Bildraum

$$\mathcal{B}_{(\text{alt})} \xrightarrow{\underline{R}} \mathcal{E}_{(\text{neu})}$$

d.h. wir stellen die alte Basis durch die neue Basis dar:

1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = r_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_{21}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r_{31}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow r_{11}=1,\ r_{21}=r_{31}=0$

2) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = r_{12}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_{22}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r_{32}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow r_{12}=r_{22}=1,\ r_{32}=0$

3) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = r_{13}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_{23}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r_{33}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow r_{13}=r_{23}=r_{33}=1$

$$\Rightarrow \underline{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \quad \left(= S^{-1} \text{ (Satz 4.4.A) aus Vorlesung}\right)$$

(d) $\underline{\tilde{D}} = \underline{R}\,\underline{D}\,\underline{S}$ (siehe Gleichung (4.3.E) aus Vorlesung)

(e) $$\underline{\tilde{D}} \overset{(d)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

8. Aufgrund von Satz 4.4.A: $\underline{\tilde{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}$ haben wir für $\underline{A} = \underline{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{I}_3\,\underline{S} \overset{\text{Def } \underline{I}_3}{=} \underline{S}^{-1}\underline{S} \overset{\text{Def Inverse } \underline{S}^{-1}}{=} \underline{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

9. a) siehe Vorlesungsunterlagen.

b) Zu zeigen ist: Für $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(\underline{x} + \alpha \underline{y}) = F(\underline{x}) + \alpha F(\underline{y})$$

Beweis: Sei $\underline{z} := \underline{x} + \alpha \underline{y} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \\ x_3 + \alpha y_3 \end{pmatrix}$

Dann gilt:

$$F(\underline{x} + \alpha \underline{y}) = F(\underline{z}) \overset{\text{Def } F}{=} \underline{a} \times \underline{z} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def} \times}{=} \begin{pmatrix} a_2 z_3 - a_3 z_2 \\ a_3 z_1 - a_1 z_3 \\ a_1 z_2 - a_2 z_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def } \underline{z}}{=} \begin{pmatrix} a_2(x_3 + \alpha y_3) - a_3(x_2 + \alpha y_2) \\ a_3(x_1 + \alpha y_1) - a_1(x_3 + \alpha y_3) \\ a_1(x_2 + \alpha y_2) - a_2(x_1 + \alpha y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_2 y_3 - a_3 y_2 \\ a_3 y_1 - a_1 y_3 \\ a_1 y_2 - a_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def} \times}{=} \underline{a} \times \underline{x} + \alpha (\underline{a} \times \underline{y})$$

$$= F(\underline{x}) + \alpha F(\underline{y}) \qquad \square$$

c) Analog zu 3(c):

$$F(\underline{e}_1) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \underline{e}_1 + a_3 \cdot \underline{e}_2 + (-a_2) \cdot \underline{e}_3$$

$$\overset{!}{=} a_{11} \cdot \underline{e}_1 + a_{21} \underline{e}_2 + a_{31} \underline{e}_3$$

$$F(\underline{e}_2) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (-a_3) \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + a_1 \cdot \underline{e}_3$$

$$\overset{!}{=} a_{12} \underline{e}_1 + a_{22} \underline{e}_2 + a_{32} \underline{e}_3$$

$$F(\underline{e}_3) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \underline{e}_1 + (-a_1) \underline{e}_2 + 0 \cdot \underline{e}_3$$

$$\overset{!}{=} a_{13} \underline{e}_1 + a_{23} \underline{e}_2 + a_{33} \underline{e}_3$$

Koeffizientenvergleich
$\Leftrightarrow$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

d) <u>1. Geometrische Überlegung:</u>

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $F(\underline{x}) = \underline{a} \times \underline{x}$ uns einen Vektor liefert, welcher senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{x}$ steht, mit Länge $\|F(\underline{x})\| = \|\underline{a} \times \underline{x}\| = \|a\| \cdot \|x\| \cdot \sin(\alpha)$ (wobei α den Winkel zwischen $\underline{a}$ und $\underline{x}$ bezeichnet), welche der Fläche des von $\underline{a}$ und $\underline{x}$ aufgespannten Parallelogramms bezeichnet.

Somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} F &= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\underline{x}) = \underline{0} \} \\ &\overset{\boxed{\|y\|=0 \Leftrightarrow y=\underline{0}}}{=} \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \|F(x)\| = 0 \} \\ &= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \sin(\alpha) = 0 \} \\ &= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \alpha = 0 \text{ oder } \pi \} \\ &= \operatorname{span}\{\underline{a}\} \end{aligned}$$

(Fläche des Parallelogramms ist 0, falls $\underline{x} \parallel \underline{a}$)

<u>2. Benutzung der Darstellungsmatrix $\underline{A}$ aus 9.(c):</u>

$$\operatorname{Kern}(F) = \operatorname{Kern}(\underline{A}) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \underline{A}\underline{x} = \underline{0} \}$$

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>$a_3 \neq 0$</u> :

$$\overset{a_3 Z_3 + a_2 Z_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 a_1 & -a_2 a_1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{z_3 + a_1 z_2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 1. $\underline{a_3 \neq 0}$: $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{a_2}{a_3} t$, $x_1 = \frac{a_1}{a_3} t$

$$\Rightarrow \text{Kern } A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \frac{1}{a_3} \right\} = \text{span } \underline{a}$$

$\underline{a_3 = 0}$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \end{array}\right)$

da $\underline{a} \neq \underline{0}$ muss eine der beiden Bedingungen gelten

- $\underline{a_2 \neq 0}$: $x_3 = 0$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_1 = \frac{a_1}{a_2} t$

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{a_1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Kern } A = \text{span } \underline{a}$

- $\underline{a_1 \neq 0}$: $x_3 = 0$, $x_1 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{a_2}{a_1} t$

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{a_2}{a_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Kern } A = \text{span } \underline{a}$

(e) Wir wissen aus (d), dass gilt $\text{Kern}(F) = \text{span } \underline{a}$, $\underline{a} \neq \underline{0}$.
Deshalb gilt
$\dim \text{Kern}(F) = 1$
Mithilfe der Dimensionsformel erhalten wir:
$\text{Rang}(F) = \dim \text{Bild}(F) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Kern}(F) = 2$.

(f) $\langle \underline{x}, F(\underline{x}) \rangle = \underline{0}$, da $F(\underline{x})$ per Definition des Vektorprodukts senkrecht zu $\underline{x}$ steht!
(Wir können dies auch explizit berechnen und erhalten dasselbe:

$$\langle \underline{x}, F(\underline{x}) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= x_1 (\cancel{a_2} x_3 - a_3 \cancel{x_2}) + x_2 (\cancel{a_3} x_1 - a_1 \cancel{x_3}) + x_3 (\cancel{a_1} x_2 - \cancel{a_2} x_1) = 0$$

10. (a) Sei $n := \text{length}(\underline{x})$ (Dimension von $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

Dann gilt für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$

- $\underline{y} = \text{a9\_f1}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_n \\ 2 \cdot x_{n-1} \\ \vdots \\ n \cdot x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$
- $\underline{y} = \text{a9\_f2}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & - & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$
- $\underline{y} = \text{a9\_f3}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - 2x_4 \\ \vdots \\ x_{\lfloor n/2 \rfloor} - \lfloor n/2 \rfloor x_{2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}$

  abgerundet auf nächste natürliche Zahl $m = \lfloor n/2 \rfloor \in \mathbb{N}$
- $\underline{y} = \text{a9\_f4}(\underline{x})$

$$= \begin{pmatrix} x_1+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2+1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & x_n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

- $\underline{y} = \text{a9\_f5}(\underline{x})$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k \, 2^{(n+k-2) \bmod n} \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \, 2^{(n+k-3) \bmod n} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \, 2^{(k-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

- $\underline{y} = \text{a9\_f6}(\underline{x}) = (1, 2, \ldots, n) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^{n,n}}}{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{1,n}$

sparse Matrix $\underline{S}$:

$$\left.\begin{aligned} s_{i,i+1} &= x_i & & i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ s_{i,i} &= x_i & & i \in \{1, \ldots, n\} \\ s_{i+1,i} &= x_{i+1} & & i \in \{1, \ldots, n-1\} \end{aligned}\right\} \quad \underline{S} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ x_2 & x_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & x_3 & x_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & - & \cdots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ 0 & - & \cdots & 0 & x_n & x_n \end{pmatrix}.$$

$\underline{y} = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, \ldots, (n-1)x_{n-1} + nx_n)$

(b) In jedem Fall gilt zu zeigen: $\exists\, \underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\text{ag\_fi}(\underline{x} + \alpha \underline{z}) \neq \text{ag\_fi}(\underline{x}) + \alpha\, \text{ag\_fi}(\underline{z})$.

Es sollen also Vektoren gefunden werden, für welche (L1) oder (L2) aus Def. 4.1.A aus der Vorlesung nicht erfüllt ist.

▸ <u>Beh.</u>: ag_f2 ist keine lineare Abbildung.

<u>Annahme per Widerspruch:</u> ag_f2 ist Linear.

Für $\underline{x} = \underline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1$ gilt:

$$\text{ag\_f2}(\underline{x} + \underline{z}) = \text{ag\_f2}(2\underline{x}) = 4\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \overbrace{\text{ag\_f2}(\underline{x})}^{\neq 0}$$

Andererseits:

$$\text{ag\_f2}(\underline{x} + \underline{z}) \overset{\text{Annahme}}{=} 2 \cdot \underbrace{\text{ag\_f2}(\underline{x})}_{\neq 0}$$

$\neq$ ↯

ag_f2 kann nicht linear sein! □

▸ <u>Beh</u>: ag_f4 ist keine lineare Abbildung.

<u>Gegenbeispiel:</u> Es muss gelten $\text{ag\_f4}(\underline{0}) = \underline{0}$.

Es gilt: $\text{ag\_f4}(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)n}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

Alle anderen Funktionen sind tatsächlich linear!

(c) Siehe 10.(a):

▸ $$\text{ag\_f1}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1\, x_n \\ 2\, x_{n-1} \\ \vdots \\ n\, x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 2 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{A}_{f1}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}}$$

(Wie im Hinweis angemerkt, kann auch einfach $\text{ag\_f1}(\underline{e}_1), \ldots, \text{ag\_f1}(\underline{e}_n)$ bestimmt werden:

$\underline{A}_{f1} = [\text{ag\_f1}(\underline{e}_1), \ldots, \text{ag\_f1}(\underline{e}_1)]$ (cf Aufgabe 3.(c) oder 9.(c))

- $ag\_f3(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - 2x_4 \\ \vdots \\ x_m - m x_{2m} \end{pmatrix}$ $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (abgerundet auf nächste natürliche Zahl)

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^{m,n} \ni \underline{A}_{f3} = \{a_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}} \underline{x}$$

$$= \begin{cases} 1 & i = j \\ -i & j = 2i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Dieselbe Anmerkung wie oben für ag_f1 gilt auch für die anderen Funktionen dieser Teilaufgabe)

- $ag\_f5(\underline{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \, 2^{(n+k-(\ell+1)) \bmod n} \right)_{\ell = 1,\dots,n}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^0 & \cdots & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 2^{n-1} & \cdots & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^0 & 2^1 & \cdots & 2^{n-1} \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^{n,n} \ni \underline{A}_{f5} = \{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}} \underline{x}$$

$$= \{2^{(n-1+j-i) \bmod n}\}_{1 \le i,j \le n}$$

- $ag\_f6(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \vdots \\ (n-1)x_{n-1} + nx_n \end{pmatrix}^T$

(Achtung! Koeffizienten bzgl. $\underset{(1,0,\dots,0)}{\underset{\shortparallel}{\underline{e}_1^T}}, \dots, \underset{(0,\dots,0,1)}{\underset{\shortparallel}{\underline{e}_n^T}} \in \mathbb{R}^{1,n}$.)

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ (n-1)x_{n-1} + nx_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & & \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & \cdots \\ \vdots & & 3 & 4 & \ddots & \\ & & & & n-1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & & n-1 & n \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^{n,n} \ni \underline{A}_{f6} = \{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le n} = \begin{cases} j & |i-j| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \underline{x}$$