Lösung Serie 11

1. a) Zu zeigen: (SP1) – (SP4) aus Def. 1.4D der Vorlesung für $\left(\underline{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \underline{A} = \underline{A}^T\right)$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_{\circledast} := \underline{v}^T \underline{A}\, \underline{w} = \underline{v}^T (\underline{A}\, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{A}\underline{w} \rangle$$

Beweis:

- (SP1): Wir nehmen $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ beliebig:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_{\circledast} := \underline{v}^T \underline{A}\, \underline{w} = \langle \underline{v}, \underline{A}\, \underline{w} \rangle \overset{\text{Def } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle \underline{A}\, \underline{w}, \underline{v} \rangle$$

$$\overset{\text{Def } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} (\underline{A}\, \underline{w})^T \underline{v} = \underline{w}^T \underline{A}^T \underline{v} \overset{\underline{A} = \underline{A}^T}{=} \underline{w}^T \underline{A}\, \underline{v}$$

$$\overset{\text{Def } \langle\cdot,\cdot\rangle_{\circledast}}{=} \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle_{\circledast} \quad \checkmark$$

- (SP2): Seien $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$\langle \alpha \cdot \underline{v}, \underline{w} \rangle_{\circledast} \overset{\text{Def } \langle\cdot,\cdot\rangle_{\circledast}}{=} \langle \alpha \cdot \underline{v}, \underline{A}\, \underline{w} \rangle \overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ Skalarprodukt}}{=} \alpha \langle \underline{v}, \underline{A}\, \underline{w} \rangle \overset{\text{Def } \langle\cdot,\cdot\rangle_{\circledast}}{=} \alpha \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_{\circledast}$$

$\checkmark$

- (SP3): Seien $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{u} \rangle_{\circledast} \overset{\text{Def}}{=} \langle \underline{v} + \underline{w}, \underline{A}\, \underline{u} \rangle$$

$$\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ ist Skalarprod.}}{=} \langle \underline{v}, \underline{A}\, \underline{u} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{A}\, \underline{u} \rangle$$

$$\overset{\text{Def } \langle\cdot,\cdot\rangle_{\circledast}}{=} \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle_{\circledast} + \langle \underline{w}, \underline{u} \rangle_{\circledast} \quad \checkmark$$

- (SP4): Sei $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle_{\circledast} \overset{\text{Def}}{=} \underline{v}^T \underline{A}\, \underline{v} = \underbrace{v_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{2 v_2^2}_{\geq 0} + \underbrace{3 v_3^2}_{\geq 0} > 0$$

da entweder $v_1 \neq 0$ oder $v_2 \neq 0$ oder $v_3 \neq 0$

$\checkmark$

$\square$

b) Wir definieren $\underline{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die gesuchte Normalengleichung lautet (siehe (4.5.I))

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_j < \underline{B}(:,i), \underline{B}(:,j) >_{*} = < \underline{B}(:,i), \underline{b} >_{*}$$

$$\overset{\text{Def} <\cdot,\cdot>_{*}}{\Leftrightarrow} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j < \underline{B}(:,i), \underline{A}\, \underline{B}(:,j) > = < \underline{B}(:,i), \underline{A}\, \underline{b} >$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{B}^T \underline{A}\, \underline{B}\, \underline{\alpha} = \underline{B}^T \underline{A}\, \underline{b}$$

$$\overset{\text{einsetzen}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \underline{\alpha} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4+10+18 \\ 4+18 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 32 \\ 22 \end{pmatrix}}$$

$$\overset{\text{Gauss}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4/6 \\ 0 & 8/6 \end{pmatrix} \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 32/6 \\ 22 - \frac{128}{6} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 16/3 - 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = P\underline{b} = \underline{B}\,\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5.5 \\ 5 \\ 5.5 \end{pmatrix}}}$$

c) $U = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : < \underline{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >_{*} \overset{\text{Def}}{=} < \underline{x}, \underbrace{\underline{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} > = 0 \}$

<u>Idee</u>: Wir benutzen den Gram-Schmidt-Algorithmus, um den normierten Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer ONB zu ergänzen (bzgl. $<\cdot,\cdot>_{*}$)

Wir starten mit einer bis auf den ersten Vektor $\tilde{b}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beliebigen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ des $\mathbb{R}^3$:

$\tilde{\mathcal{B}} := \{ \underline{\tilde{b}}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{\tilde{b}}^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \} \subset \mathbb{R}^3$

Gram-Schmidt liefert: $(\|\underline{v}\|_* = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle_*})$

$$\underline{b}^1 = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\|_*} = \frac{1}{\sqrt{(1,1,1)\underline{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\tilde{b}}}^2 = \underline{\tilde{b}}^2 - \langle \underline{\tilde{b}}^2, \underline{b}^1 \rangle_* \underline{b}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} , \qquad \|\underline{\tilde{\tilde{b}}}^2\|_*^2 = \frac{1}{36}(5,-1,-1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{36}(25+2+3) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$\underline{b}^2 = \frac{\underline{\tilde{\tilde{b}}}^2}{\|\underline{\tilde{\tilde{b}}}^2\|_*} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\tilde{b}}}^3 = \underline{\tilde{b}}^3 - \langle \underline{\tilde{b}}^3, \underline{b}^1 \rangle_* \underline{b}^1 - \langle \underline{\tilde{b}}^3, \underline{b}^2 \rangle_* \underline{b}^2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \left(-\frac{3}{\sqrt{30}}\right)\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6/10\\4/10\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^3 = \frac{\underline{\tilde{\tilde{b}}}^3}{\|\underline{\tilde{\tilde{b}}}^3\|_*} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\|\underline{\tilde{\tilde{b}}}^3\|_*^2 = \frac{1}{25}(0,-3,2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{25}(0+18+12)$$

$$= \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

(3) auf Übungsblatt, $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\underline{b}^2, \underline{b}^3\}$, $\{\underline{b}^2, \underline{b}^3\}$ ONB

$$\Rightarrow P\underline{v} = \sum_{i=2}^{3} \langle \underline{v}, \underline{b}^i \rangle_* \underline{b}^i , \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \underline{A}\,\underline{b}^2 \rangle \underline{b}^2 + \langle \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \underline{A}\,\underline{b}^3 \rangle \underline{b}^3$$

$$= \frac{1}{30}\left[(4,10,18)\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{30}\left[(4,10,18)\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\underbrace{(20-10-18)}_{-8}\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{30}\underbrace{(-30+36)}_{6}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\left(\begin{pmatrix} -40 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -40 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d)

```matlab
function vp = orthproject(B, v)
% Eingabe: B, 3x2-Matrix, wobei B(:,1), B(:,2) den Unterraum U aufspannen,
%          auf welchen wir orthogonal den Vektor
%          v (Spaltenvektor: 3x1 Matrix) projezieren moechten bezueglich
%          (<x,y>_* := <x,Ay>, A symmetrisch positiv definite Matrix,
%          in unserem Fall A = diag([1,2,3]) fuer x,y in R^3)
% Ausgabe: vp, die orthogonale Projektion von v auf U bezueglich <.,.>_*
%-----------------------------------------------------------------------------
% Wir definieren die Matrix A, welche das Skalarprodukt charakterisiert
A = diag([1,2,3]);
% Wir stellen die Normalengleichungen auf: B.'*A*B*alpha = B.'*A*v
C = B.'*A*B;
r = B.'*A*v;
% Wir loesen die Normalengleichungen und erhalten die Koeffizienten bzgl.
% B(:,1), B(:,2) von pv:
alpha = C\r;
% Wir berechnen vp=B*alpha
vp = B*alpha;
end
```

2. a) Zu zeigen: $\underline{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

ist orthogonal.

Beweis: Wir zeigen $\underline{D}^T(\varphi) \cdot \underline{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\underline{D}^T(\varphi) \cdot \underline{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

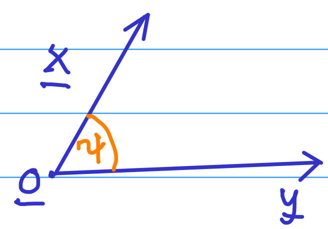
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi & (-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$

$$\overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

b) Zu zeigen: $\underline{x}$, $\underline{D}(\varphi)\underline{x}$ schliessen den Winkel ϕ ein.

Beweis: Wir wissen: Für $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\|\|\underline{y}\| \cos(\gamma)$, wobei γ den Winkel darstellt, welchen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ einschliessen:



Somit muss in unserem Fall gelten:

$$\boxed{\varphi \overset{!}{=} \gamma = \arccos\left(\frac{\langle \underline{x}, \underline{D}(\varphi)\underline{x} \rangle}{\|\underline{x}\| \|\underline{D}(\varphi)\underline{x}\|}\right)} \quad (1)$$

1.a) $\underline{D}(\varphi)$ ist orthogonal und somit längenerhaltend: $\|\underline{D}(\varphi)\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$

Formen wir die rechte Seite von (1) weiter um, erhalten wir:

$$\psi = \arccos\left(\frac{\langle \underline{x}, \underline{D}(\varphi)\underline{x}\rangle}{\|\underline{x}\|^2}\right)$$

- Subst.: $\underline{\tilde{x}} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$
- Bilinearität $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Linearität $\underline{D}(\varphi)$

$$= \arccos\left(\langle \underline{\tilde{x}}, \underline{D}(\varphi)\underline{\tilde{x}}\rangle\right)$$

$\underline{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$

$$= \arccos\left(\left\langle \underline{\tilde{x}}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\tilde{x}_1 - \sin(\varphi)\tilde{x}_2 \\ \sin(\varphi)\tilde{x}_1 + \cos(\varphi)\tilde{x}_2 \end{pmatrix}\right\rangle\right)$$

$$= \arccos\left(\cos(\varphi)\tilde{x}_1^2 \cancel{- \sin(\varphi)\tilde{x}_1\tilde{x}_2} \cancel{+ \sin(\varphi)\tilde{x}_1\tilde{x}_2} + \cos(\varphi)\tilde{x}_2^2\right)$$

$$= \arccos\left(\cos(\varphi)\|\underline{\tilde{x}}\|^2\right)$$

$\|\underline{\tilde{x}}\|^2 = \left\|\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}\right\|^2 = 1$

$$= \varphi$$

$\square$

c) Zu zeigen: $\underline{D}(\varphi)\cdot\underline{D}(\psi) = \underline{D}(\psi)\cdot\underline{D}(\varphi)$ für alle $\varphi,\psi \in [0,2\pi[$

Beweis: $\underline{D}(\varphi)\cdot\underline{D}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -[\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi] \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

Additionstheoreme:

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\psi+\varphi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{D}(\varphi+\psi)$$

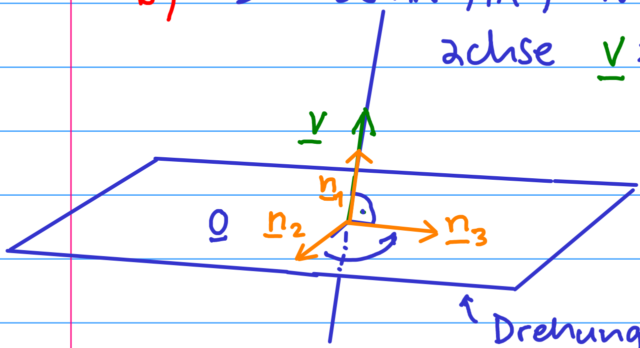
$\overset{!}{=}$

If we interchange the rule of φ and ψ, we obtain: $\underline{D}(\psi)\cdot\underline{D}(\varphi) = \underline{D}(\psi+\varphi)$

$\square$

3. a) siehe Vorlesungsunterlagen!

b) $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ Rotation um Winkel $30°$ mit Drehachse $\underline{v}$:



Drehung in 2D, Ebene $\perp$ zu Drehachse

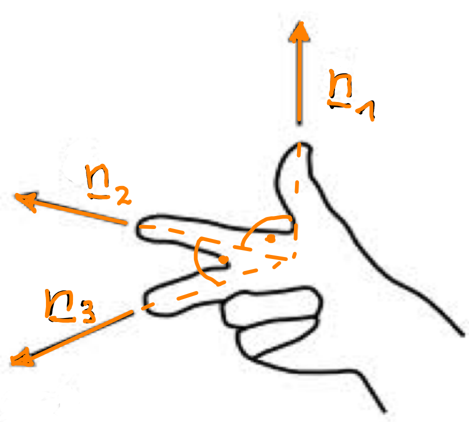
$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Idee: Wir bestimmen als erstes eine Basis $\mathcal{B}$, für welche wir die Koeffizientenmatrix $I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D) = \underline{D}$ kennen:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$\mathcal{B} = \{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3\}$ Orthonormalbasis, sodass

$\underline{n}_1 = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und "Rechte-Hand-Regel" gilt:



Wir bestimmen $\underline{n}_2$ mit Gram-Schmidt und $\underline{n}_3$ mit dem Vektorprodukt, da wir wissen, dass dieses die "Rechte-Hand-Regel" erfüllt:

Um Gram-Schmidt anwenden zu können, benötigen wir einen zu $\underline{n}_1$ linear unabhängigen Vektor $\underline{b}_2$.
ZB. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir erhalten:

$$\tilde{\underline{n}}_2 = \underline{b}_2 - \langle \underline{b}_2, \underline{n}_1 \rangle \underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \overbrace{\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}}^{=\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \frac{\tilde{\underline{n}}_2}{\|\tilde{\underline{n}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\underline{n}}_3 = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2-0 \\ 1+1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da $\|\tilde{\underline{n}}_3\| = \|\underline{n}_1\| \|\underline{n}_2\| \sin\frac{\pi}{2} = 1$, erhalten wir:

$$\underline{n}_3 = \frac{\tilde{\underline{n}}_3}{\|\tilde{\underline{n}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bitte beachten Sie, dass auch andere Basen (u.a. andere Wahl von $\underline{b}_2$) zulässig sind!

Wir erhalten $\tilde{\underline{D}} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{S}$, indem wir die Basiswechsel-Matrix $\underline{S}$ bestimmen:

Die neue Basis ist $\mathcal{E} = \{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Somit ist S^{-1} einfach abzulesen:

$$S^{-1} = (\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist orthogonal, da sie aus orthonormalen Spaltenvektoren besteht.

Somit gilt

$$S = (S^{-1})^{-1} \overset{S^{-1}\text{ orthonormal}}{=} (S^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\tilde{D} = I_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(D) = \underline{S}^{-1}\,\underline{D}\,\underline{S}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

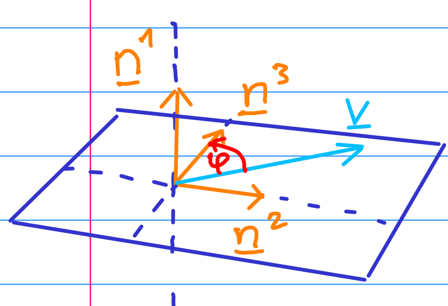
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{12} \end{pmatrix}.$$

4. a) <u>Gesucht</u>: Basis $\mathcal{B} = \{\underline{n}^1, \underline{n}^2, \underline{n}^3\}$ des $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Rotation D, welche den Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ auf die positive x_1-Achse dreht (auf $\|\underline{v}\| \cdot \underline{e}^1$, $\underline{e}^1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$), folgende Form hat:

$$\underline{D} = I_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ für ein } \varphi \in [0, 2\pi[.$$

<u>Überlegung</u>: Wir suchen eine orthonormale Basis, sodass $\underline{n}^1$ in Richtung der Rotationsachse zeigt und $\underline{n}^2, \underline{n}^3$, die die Rotationsebene aufspannen.

Wichtig ist, dass die Vektoren $\underline{n}^2$ und $\underline{n}^3$ konsistent mit dem Winkel φ gewählt werden!



Wir verwenden das Vektorprodukt, um eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ zu konstruieren. Da das Vektorprodukt verschwindet, falls gilt $\underline{v} \parallel \underline{e}^1$, müssen wir folgende Fallunterscheidung machen:

i) $\underline{v} \parallel \underline{e}^1$: Es gilt: $\underline{v} = \|\underline{v}\| \underline{e}^1$ oder $\underline{v} = -\|\underline{v}\| \underline{e}^1$

Somit können wir wählen:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{n}^1 := \underline{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{n}^2 := \underline{e}^1, \underline{n}^3 := \underline{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) $\underline{v}$ und $\underline{e}^1$ nicht parallel, bzw. $\underline{v} \neq \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Sei $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$. Wir wählen

$$\underline{n}^1 := \frac{\underline{v} \times \underline{e}^1}{\|\underline{v} \times \underline{e}^1\|} = \frac{1}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}^2 := \frac{\underline{e}^1 \times \underline{n}^1}{\|\underline{e}^1 \times \underline{n}^1\|} = \frac{1}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{n}^3 := \underline{e}^1$, und somit

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{n}^1 := \frac{1}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \underline{n}^2 := \frac{1}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \underline{n}^3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\varphi = \arccos\left(\frac{\langle \underline{v}, \underline{e}^1 \rangle}{\|v\|} \right)$

(Achtung: Je nach Wahl der Basis $\mathcal{B}$ in a) φ konsistent gewählt werden! Vertauschen von $\underline{n}^2$ und $\underline{n}^3$ unserer Basis $\mathcal{B}$ oben, resultiert in Änderung des Winkels zu $\varphi = 2\pi - \arccos\left(\frac{\langle \underline{v}, \underline{e}^1 \rangle}{\|v\|} \right)$)

c)

```
function D = findrot(v)
% Eingabe v : Spaltenvektor v aus R^3\{0}
% Ausgabe D : Rotationsmatrix D in R^{3,3} Koeffizientenmatrix
%             bzgl. der Kartesischen Basis der Rotation,
%             welche v auf e^1=||v||(1,0,0)^T dreht.
% ---------------------------------------------------------------
% Berechne den Winkel phi der Drehung:
phi = acos(v(1)/norm(v));
% Berechnung Matrix D_tilde
c = cos(phi);
s = sin(phi);
A = [c,-s;s,c];
D_tilde = blkdiag(1,A);
% Berechne die Basisvektoren n_1, n_2, n_3 der Basis
% bzgl. derer die Matrixdarstellung
% bekannt ist, naemlich der Matrix D_tilde entspricht
% ACHTUNG: Fallunterscheidung notwendig! (siehe 3a)
if (v(2) == 0) && (v(3) ==0)
    E = eye(3);
    n_1 = E(:,3);
    n_2 = E(:,1);
    n_3 = E(:,2);
else
    norm_n_1 = sqrt(v(2)^2+v(3)^2);
    n_1 = 1/norm_n_1 * [0;v(3);-v(2)];
    n_2 = 1/norm_n_1 * [0;v(2);v(3)];
    n_3 = [1;0;0];
end
% Zum Schluss wird der Basiswechsel zur Kartesischen
% Basis vollzogen.
% Wir nutzen hier aus, dass S_inv eine orthogonale
% Matrix ist.
S_inv = [n_1,n_2,n_3];
D = S_inv * D_tilde * S_inv.';
end
```

Testen wir mit dem in der Übungsaufgabe gegebenen Vektor, erhalten wir tatsächlich

```
>> v = [1;2;3];
>> M = findrot(v)

M =

   0.267261241912424   0.534522483824849   0.801783725737273
  -0.534522483824849   0.774541920588438  -0.338187119117343
  -0.801783725737273  -0.338187119117343   0.492719321323986
```

d)

```
function bool = test_findrot()
% Testet die Funktion
% D = findrot(v)
% Rueckgabe: 1 falls die Funktion D = findrot(v) stimmt
%
%            0 falls die Implementierung von D = findrot(v)
%              fehlerhaft ist

% Idee : Wir testen die Funktion, indem wir fuer 100 Zufallsvektoren v im
% R^3\{0} testen, ob D*v =||v||*(1,0,0)^T und D.'*D = I, sprich ob D eine
% orthogonale Matrix ist.
% Zudem testen wir den Spezialfall v = (alpha,0,0)^T (v parallel (1,0,0)^T),
% fuer 10 Zufallswerte alpha.
% ACHTUNG: Rundungsfehler in der Groessenordnung epsilon koennen
% stattfinden und muessen beruecksichtigt werden. Wir waehlen grosszuegig
% epsilon = 10^(-14).
bool = 1;
bool1 = 1;
bool2 = 1;
bool3 = 1;
E = eye(3);
e1 = [1;0;0];
for i = 1:100
    v = rand(3,1);
    n_v = norm(v);
    D = findrot(v);
    v_ = D*v;
    % Falls wir nicht das Erwartete erhalten
    % (norm(D*v - ||v||*91,0,0)^T)<=10^(-14)),
    % setzen wir bool = 0;
    if norm(v_ - n_v*e1)>10^(-14)
        bool = 0;
    elseif norm(D.'*D-E)>10^(-14)
        bool2 =0;
    end
end
if bool ==0
    disp('Allgemeine Matrix bereits fehlerhaft!\n')
end
if bool2 == 0
    disp('Matrix D ist nicht orthogonal!\n')
    bool =0;
end
% Testen des "Spezialfalls" v || e1
for i = 1:10
    alpha = rand(1);
    v = [alpha;0;0];
    n_v = abs(alpha);
    D = findrot(v);
    v_ = D*v;
    if norm(v_ - n_v*e1)>10^(-14)
        bool = 0;
        bool1 = 0;
    elseif norm(D.'*D-E)>10^(-14)
        bool3 =0;
        bool =0;
    end
end
if bool1 == 0
    disp('Achtung, Spezialfall v || e1 scheint nicht beruecksichtigt worden zu sein!\n')
end
if bool3 ==0
    disp('Matrix D ist nicht orthogonal fuer den Spezialfall v||e1!')
end
```

5. b) Sei $R \in \mathcal{L}(V,V)$, Spiegelung, wobei V einen Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Dimension $\dim V = n$.

<u>Zu zeigen:</u> Es gibt eine Basis $\mathcal{B}_V$ von V, sodass $\underline{R} := I_{\mathcal{B}_V}(R) = \operatorname{diag} \underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, wobei $\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \{-1, 1\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

<u>Beweis:</u> Aus Abschnitt 4.6.3 der Vorlesung wissen wir: $R\underline{x} = P_U \underline{x} + (P_U \underline{x} - \underline{x})$, wobei P_U die orthogonale Projektion auf einen Untervektorraum $U \subset V$ darstellt.

Wir benutzen weiter die Eigenschaften von P_U:

(Siehe auch Satz 4.5.E) In Serie 10, A1 haben wir bewiesen:

Es gilt: $V = \operatorname{Kern} P_U \oplus \operatorname{Bild} P_U = \operatorname{Kern} P_U \oplus U$

Verwenden wir eine Basis des Bildes $\mathcal{B}_{\operatorname{Bild} P_U} = \{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^r\}$ und eine Basis des Kerns von P_U $\mathcal{B}_{\operatorname{Kern} P} = \{\underline{b}^{r+1}, \dots, \underline{b}^n\}$, dann ist $\mathcal{B}_V = \{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^n\}$ Basis von V.

Da $P_U|_{\operatorname{Bild} P_U} = \operatorname{Id}_{\operatorname{Bild} P_U}$ und $P_U|_{\operatorname{Kern} P_U} = \underline{0}$, gilt:

$$\begin{aligned} R(\underline{b}^i) &= P_U \underline{b}^i + (P_U \underline{b}^i - \underline{b}^i) \qquad i \in \{1, \dots, r\} \\ &= \underline{b}^i + (\underline{b}^i - \underline{b}^i) \\ &= \underline{b}^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\underline{b}^i) &= P_U \underline{b}^i + (P_U \underline{b}^i - \underline{b}^i) \qquad i \in \{r+1, \dots, n\} \\ &\ \underline{0} + (\underline{0} - \underline{b}^i) \\ &= -\underline{b}^i \end{aligned}$$

und somit

$$\underline{R} = I_{\mathcal{B}_V}(R) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \underline{I}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{I}_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

c) Wir verwenden b):

In unserem Fall ist $\text{Bild} P_u = U = \underline{n}^{\perp} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{x}, \underline{n} \rangle = 0 \}$

$\text{Kern } P_u = \text{span } \underline{n}$.

Wir verwenden nun den Gram-Schmidtschen Algorithmus, (bzw. die QR-Zerlegung in MATLAB) um eine geeignete Basis von $V = \mathbb{R}^d$ zu finden, welche sich in Kern P_u und Bild P_u unterteilen lässt, wie in b) beschrieben.

Sei $\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\underline{0}\}$

Als "Startbasis" wählen wir

$\tilde{\mathcal{B}}_V = \{ \underline{n}, \underline{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}^{i_0 - 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i_0 - 1, \underline{e}^{i_0+1}, \underline{e}^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$,

wobei $i_0 = \min \{ i : n_i \neq 0 \}$ ($\leq d$, da $\underline{n} \neq \underline{0}$ nach Annahme)

Dank der Wahl von i_0 haben wir garantiert, dass $\underline{e}^{i_0} = \underline{n} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{d} n_i \underline{e}^i$, und $\tilde{\mathcal{B}}_V$ somit tatsächlich eine Basis von $V = \mathbb{R}^d$ bildet.

Gram-Schmidt liefert uns:

$\underline{b}^1 = \frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|}$

$\tilde{\underline{b}}^i = \underline{e}^i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \underline{e}^i, \underline{b}^j \rangle \underline{b}^j, \quad \underline{b}^i = \frac{\tilde{\underline{b}}^i}{\|\tilde{\underline{b}}^i\|} \qquad i = 2, \dots, d$

mit $\mathcal{B}_V = \{ \underline{b}^1, \dots, \underline{b}^d \}$ Basis von $\mathbb{R}^d$,

$\mathcal{B}_{\text{Kern} P_u} = \{ \underline{b}^1 \}$, $\mathcal{B}_{\text{Bild} P_u} = \{ \underline{b}^2, \dots, \underline{b}^d \}$

Bemerkung: Der Einfachheit halber haben wir hier die Nummerierung nicht so gewählt wie in Teilaufgabe b). Wir starten mit der Nummerierung von $\mathcal{B}_{\text{kan Pu}}$. Somit hat die Koeffizientenmatrix hier folgende Form:

$$\underline{R} = I_{\mathcal{B}_V}(R) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{I}_{d-1} \end{array}\right) = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

d) $d=3$, $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir benutzen c): "Startbasis" $\tilde{\mathcal{B}}_V = \{\underline{n}, \underline{e}^2, \underline{e}^3\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Mit dem Gram-Schmidt-Algorithmus erhalten wir:

$$\underline{b}^1 = \frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^2 = \frac{\underline{\tilde{b}}^2}{\|\underline{\tilde{b}}^2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{b}}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^3 = \frac{\underline{\tilde{b}}^3}{\|\underline{\tilde{b}}^3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathcal{B}_V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\tilde{R}} = I_{\mathcal{B}_V}(R) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Matrixdarstellung: $\underline{R} = I_{\mathcal{E}}(R) = \underline{S}^{-1}\,\tilde{\underline{R}}\,\underline{S}$,

wobei $\tilde{\underline{R}} = I_{\mathcal{B}_V}(R)$ aus Teilaufgabe d) und

$\underline{S}^{-1} = (\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^d)$, $\underline{S} = (\underline{S}^{-1})^{-1} \underset{\uparrow}{=} (\underline{S}^{-1})^T$

$\underline{S}^{-1}$ orthogonale Matrix

Basiswechselmatrizen, wobei neue Basis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Kartesische Basis und alte Basis $\mathcal{B}_V = \{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^d\}$ aus Teilaufgabe d).

Somit erhalten wir

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

f)

```
function Rmat = reflectionmatrix(n)
% Eingabe: Spaltenvektor n der L?nge d, Normalenvektor der Hyperebene H,
% an welcher gespiegelt werden soll.
%
% Ausgabe: Koeffizientenmatrix Rmat der Spiegelung an H bezueglich der
% Kartesischen Basis.
% -----------------------------------------------------------------------
% Finde ersten Eingrag ungleich Null in n
i0 = 1;
d = length(n);
while n(i0) == 0
    i0 = i0+1;
end
% Bilde orthonormale Basis mithilfe der QR-Zerlegung von Matlab. Startbasis
% ist B = {n,E(:,1),E(:,2),...,E(:,i0-1),E(:,i0+1),...,E(:,n)}
E = eye(d);
B = [n, E(:,1:i0-1), E(:,i0+1:d)];
[Q,R] = qr(B);
% Koeffizientenmatrix Rmat_tilde von R bezueglich der Basis B
Rmat_tilde = diag([-1,ones(1,d-1)]);
% Koordinatentransformation fuehrt zur gesuchten Matrix Rmat
Rmat = Q * Rmat_tilde * Q.';
end
```

<u>Bemerkung</u>: Die Durchführung der QR-Zerlegung ersetzt hier den Gram-Schmidt-Algorithmus.

6. a) $\mathcal{B} = \{ \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m \}$, $\underline{a}^k := (a_j^k)_{j=1}^n$,

$$a_j^k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & j \in \{2k-1, 2k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad n = 2m$$

<u>Zu zeigen</u>: $\mathcal{B}$ ist ONB (Orthonormalbasis) von $U \subset \mathbb{R}^n$,
$U := \operatorname{span}\{ \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m \}$

<u>Beweis</u>: Es reicht aus, zu zeigen dass

$$\langle \underline{a}^k, \underline{a}^\ell \rangle = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases}$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ Eukl. Skalarprodukt)

Wir haben:

$$\langle \underline{a}^k, \underline{a}^\ell \rangle = \sum_{j=1}^n a_j^k a_j^\ell$$

$$= \begin{cases} a_{2k-1}^k a_{2k-1}^\ell + a_{2k}^k a_{2k}^\ell + a_{2\ell-1}^k a_{2\ell-1}^\ell + a_{2\ell}^k a_{2\ell}^\ell & k \neq \ell \\ \left(a_{2k-1}^k\right)^2 + \left(a_{2k}^k\right)^2 & k = \ell \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ \frac{2}{4} + \frac{2}{4} & k = \ell \end{cases} = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad ✓$$

$\square$

b) Sei $\mathcal{B} = \{\underline{n}^1, \dots, \underline{n}^\ell\}$ eine ONB von $U < V$, ℓ-dim Unterraum des Vektorraumes V, versehen mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.

<u>Zu zeigen</u>: Die Orthogonalprojektion $P_U \in \mathcal{L}(V,V)$ auf U ist gegeben durch:

$$P_U \underline{v} = \sum_{j=1}^{\ell} (\underline{v}, \underline{n}^j)\underline{n}^j$$

<u>Beweis</u>:

<u>Idee</u>: Wir definieren die Abbildung

$L : V \longrightarrow V$, $\quad L\underline{v} := \sum_{j=1}^{\ell} (\underline{v}, \underline{n}^j)\underline{n}^j$ für $\underline{v} \in V$

und zeigen dass gilt:

$$L = P_U$$

i) <u>Beh</u>: $L \in \mathcal{L}(V,V)$

<u>Beweis</u>: Für $\underline{u}, \underline{v} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$L(\underline{u} + \alpha \underline{v}) \overset{\text{Def } L}{=} \sum_{j=1}^{\ell} (\underline{u} + \alpha \underline{v}, \underline{n}^j)\underline{n}^j$$

$$\overset{\substack{\text{Linearität}\\(\cdot,\cdot)}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} (\underline{u}, \underline{n}^j)\underline{n}^j + \alpha \sum_{j=1}^{\ell} (\underline{v}, \underline{n}^j)\underline{n}^j$$

$$\overset{\text{Def } L}{=} L\underline{u} + \alpha L\underline{v}$$

$$\Rightarrow L \in \mathcal{L}(V,V) \quad \square$$

ii) <u>Beh</u>: $(\underline{u}, \underline{v} - L\underline{v}) = 0$ für alle $\underline{v} \in V$, für alle $\underline{u} \in \text{Bild}(L)$

<u>Beweis</u>: $\text{Bild}(L) = U$, da $L(\underline{n}^i) = \underline{n}^i$, $i = 1, \dots, \ell$, und somit $\text{Bild}(L) = \text{span}\{\underline{n}^1, \dots, \underline{n}^\ell\} \overset{\text{Def}}{=} U$

Wir nehmen also ein $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} u_i \underline{n}^i \in \text{Bild}(L)$, $\underline{v} \in V$ und erhalten:

$$(\underline{u}, \underline{v} - L\underline{v}) \overset{\text{Lin.}(\cdot,\cdot),\ \text{Def } L;\underline{u}}{=} \sum_{i=1}^{\ell} u_i \left(\underline{n}^i, \underline{v} - \sum_{j=1}^{\ell} (\underline{v}, \underline{n}^j)\underline{n}^j\right)$$

$$\overset{\text{Bilin}(\cdot,\cdot)}{=} \sum_{i=1}^{\ell} u_i (\underline{n}^i, \underline{v}) - \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} u_i (\underline{v}, \underline{n}^j) \underbrace{(\underline{n}^i, \underline{n}^j)}_{\overset{\text{Def ONB}}{=} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} u_i (\underline{n}^i, \underline{v}) - \sum_{i=1}^{\ell} u_i (\underline{v}, \underline{n}^i) = 0 \quad \square$$

c) Wir verwenden die allgemeine Erkenntnis aus b), und a) Da $U := \text{span}\{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m\}$ in unserem konkreten Fall, gilt für $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$; $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$L\underline{v} = P_U \underline{v} = \sum_{j=1}^{m} \langle \underline{v}, \underline{a}^j \rangle \underline{a}^j \qquad (1)$$

da wir in a) gezeigt haben, dass $\mathcal{B} = \{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m\}$ eine ONB darstellt und somit die Voraussetzungen in b) erfüllt sind.

Wir vereinfachen (1) zu:

$$\underline{w} := L\underline{v} = \sum_{j=1}^{m} (v_{2j-1} + v_{2j}) \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{a}^j \quad \text{und somit} \quad \left(\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right)$$

$$w_{2j} = w_{2j-1} = \frac{1}{2}(v_{2j-1} + v_{2j}) \qquad j = 1, \dots, m \qquad (2)$$

d)

```
function vsmall = encode(v)
% Low pass encoding of a signal
n = size(v,1);
if (mod(n,2) ~= 0), error('Even Signal length required'); end
vsmall = 0.5*(v(1:2:n-1)+v(2:2:n));
```

e) Mithilfe von Gleichung (2) in Teilaufgabe c) erhalten wir ($\mathcal{E} := \{ \underline{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}$ kart. Basis)

$$\underline{L} = I_{\mathcal{E}}(L) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \cdots & \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{matrix}} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ m-mal auf Diagonale

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_2 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \underline{0} \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{E}_2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Unter Verwendung von e) wird schnell klar:

$$\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{Kern}(\underline{L}) = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^n : \underline{L}\,\underline{v} = \underline{0} \}$$

$$= \{ \underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m \}, \quad \text{mit}$$

$$\underline{b}^k := (b^k_j)_{j=1}^n, \quad b^k_j = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & j = 2k-1 \\ -\sqrt{2}/2, & j = 2k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Natürlich gibt es hier viele andere Möglichkeiten, die Basis zu wählen. Diese hier ist jedoch besonders schön, da sie $\mathcal{B} = \{ \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m \}$ zu einer ONB des $\mathbb{R}^n$ ergänzt).

g)

```
function vbig = decode(v)
% Expansion of signal in low pass basis
m = length(v);
% vbig(2*i) = vbig(2*i+1) = 2*v(i)/sqrt(2), i = 1:m
vbig = reshape([v';v'],2*m,1)'*2/sqrt(2);
```

7. Wir betrachten $\mathbb{P}_d$ mit $(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$, $p,q \in \mathbb{P}_d$, Skalarprodukt. Sei

$\mathcal{B} := \{ \underbrace{t \mapsto 1}_{=: \underline{b}^1(t)}, \underbrace{t \mapsto t}_{=: \underline{b}^2(t)}, \dots, \underbrace{t \mapsto t^d}_{=: \underline{b}^{d+1}(t)} \}$ die Monombasis von $\mathbb{P}_d$.

Wir definieren
$$L_d : \mathbb{P}_d \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto L_d(p) := \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Legendre-Polynom-Basis:

$\tilde{\mathcal{B}} = \{ \underline{P}_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}, \underline{P}_1(t) := \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \underline{P}_2(t) := \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2 - 1)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{E} := \{ \underline{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ Kartesische Basis des $\mathbb{R}^2$

a) Wir bestimmen $\underline{L}_2 := I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(L_2)$:

$$L_p(\underline{b}^i) = \begin{pmatrix} \underline{b}^i(-1) \\ \underline{b}^i(1) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & i \text{ ungerade} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & i \text{ gerade} \end{cases}, \quad i \in \{1, .., d+1\}$$

$$\Rightarrow \underline{L}_p = I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(L_p) = \Big(\underbrace{\overset{\underline{E}_2 =:}{\boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}} \; \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \; \dots}_{(d+1)/2 \text{ mal}} \Big) \in \mathbb{R}^{2,d+1}$$

$$= \begin{cases} [\underline{E}_2, \dots, \underline{E}_2] & d \text{ ungerade} \\ [\underbrace{\underline{E}_2, \dots, \underline{E}_2}_{d/2 \text{ mal}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] & d \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zu zeigen: $(\underline{P}_i, \underline{P}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, $i,j \in \{0,1,2\}$

Beweis: $(\underline{P}_0, \underline{P}_0) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{1}{2} t \Big|_{t=-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$(\underline{P}_1, \underline{P}_1) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} t \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} t\, dt = \frac{1}{2} t^3 \Big|_{t=-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$(\underline{P}_2, \underline{P}_2) = \int_{-1}^{1} \frac{5}{8}(3t^2-1)^2\,dt = \frac{5}{8}\int_{-1}^{1} 9t^4 - 6t^2 + 1\,dt$$

$$= \frac{9}{8}t^5 - \frac{10}{8}t^3 + \frac{5}{8}t \,\Big|_{t=-1}^{1} = \frac{9}{4} - \frac{10}{4} + \frac{5}{4}$$

$$= 1$$

Da Skalarprodukt symmetrisch, reicht es aus, aus nur $i \leq j$ zu prüfen!

$$(\underline{P}_0, \underline{P}_1) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 \,\Big|_{t=-1}^{1} = 0$$

$$(\underline{P}_0, \underline{P}_2) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{5}}{4}(3t^2-1)\,dt = \frac{\sqrt{5}}{4}(t^3 - t)\,\Big|_{t=-1}^{1}$$

$$= 0$$

$$(\underline{P}_1, \underline{P}_2) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}(3t^3 - t)\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}\left(\frac{3}{4}t^4 - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=-1}^{1} = 0$$

$\square$

c) $\underline{\tilde{L}}_2 = \underline{I}^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(L_2) = \underline{L}_2 \cdot \underline{S}$, wobei $\underline{L}_2 = \underline{I}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(L_2)$ aus a)

und $\underline{S}$ den Basiswechsel im Definitionsbereich von der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ zur alten Basis $\mathcal{B}$ bezeichnet:

$\underline{P}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underline{b}^1$, $\underline{P}_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, \underline{b}^2$, $\underline{P}_2(t) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\,\underline{b}^3 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\,\underline{b}^1$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{L}}_2 = \underline{L}_2 \cdot \underline{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{pmatrix}}}$$

d) In a) haben wir die Koeffizientenmatrix von L_d bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}$ bestimmt:

$$\underline{L}_d = I^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(L_d) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

Durch Gausselimination erhalten wir $\{\frac{1}{2}(Z2 - Z1)\}$

$$\underline{L}_d \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\operatorname{Rang} L_d \overset{\text{Satz 4.2.D aus Vorlesung}}{=} \operatorname{Rang}(\underline{L}_d) = \begin{cases} 2 & d \geq 1 \\ 1 & d = 0 \end{cases}$

e) Mithilfe von d) und der Dimensionsformel erhalten wir:

$$\dim \mathbb{P}_d = \dim \operatorname{Kern}(L_d) + \underbrace{\dim \operatorname{Bild}(L_d)}_{= \operatorname{Rang}(L_d)}$$

$$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Kern}(L_d) = \dim \mathbb{P}_d - \operatorname{Rang}(L_d) \overset{d)}{=} d+1 - 2 = d-1$$

Es bleibt also zu zeigen, dass für $\mathcal{B}_{kern}$, mit
$\mathcal{B}_{kern} := \{ p^1(t) = 1 - t^2, p^2(t) = t(1-t^2), \ldots, p^{d-1}(t) = t^{d-2}(1-t^2)\}$
gilt:

i) $\mathcal{B}_{kern} \subset \operatorname{Kern}(L_d)$

ii) $\alpha_1 p^1 + \ldots + \alpha_{d-1} p^{d-1} = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_{d-1} = 0 \quad (3)$

<u>Beweis</u>: i) $L_d(p^i) = \begin{pmatrix} p^i(-1) \\ p^i(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{i-1} \overbrace{(1 - (-1)^2)}^{=0} \\ 1 \cdot \underbrace{(1 - 1^2)}_{=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $i = 1, \ldots, d-1$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{kern} \subset \operatorname{Kern}(L_d)$$

ii) $(3) \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ d+1 \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{d-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Gauss}}{\underset{\substack{z_{k+2}+z_k \\ k=1,\dots,d-1}}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{c} \underline{I}_{d-1} \\ \hline \underline{0} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{d-1} = 0$$

$\square$

f) Aus b) wissen wir: $\tilde{\mathcal{B}} = \{ \underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2 \}$ ist ONB von $\mathbb{P}_2$. Somit gilt:

$$P_{\mathbb{P}_2}(\underline{p}) = \sum_{j=1}^{3} (\underline{p}, \underline{P}_{j-1}) \underline{P}_{j-1} = \sum_{j=0}^{2} (\underline{p}, \underline{P}_j) \underline{P}_j \quad \text{und}$$

$$P_{\mathbb{P}_2}(t \mapsto t^n) = (t \mapsto t^n, \underline{P}_0) \underline{P}_0 + (t \mapsto t^n, \underline{P}_1) \underline{P}_1 + (t \mapsto t^n, \underline{P}_2) \underline{P}_2$$

$\ulcorner$

$$(t \mapsto t^n, \underline{P}_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^n \, dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{n+1} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(t \mapsto t^n, \underline{P}_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^{n+1} \, dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{n+2} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$(t \mapsto t^n, \underline{P}_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} t^n (3t^2 - 1) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} 3t^{n+2} - t^n \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{n+3} t^{n+3} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{t=-1}^{t=1}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1} \right) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\lrcorner$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n+1} + 0 + \frac{5}{4}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right)(3t^2 - 1) & n \text{ gerade} \\ 0 + \frac{3}{n+2} t + 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{9}{4(n+1)} + \frac{15}{4(n+3)} + \frac{15}{4}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right) t^2 & n \text{ gerade} \\ \frac{3}{n+2} t & n \text{ ungerade} \end{cases}$$