Endsemesterprüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

HS 2013

Prof. R. Hiptmair

Name	MUSTERLÖSUNG	Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	17.12.2013	

1	2	3	4	5	Total
4P	5P	4P	4.5P	4P	21.5P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- Aufgabenblätter sind in den braunen Kuverts.
  Diese bitte mit Ihrem Namen beschriften.
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- Prüfungsdauer: 20 Minuten.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**

Viel Erfolg!

Endsemesterprüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

D-BAUG

HS 2013

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen,
abgesehen von Aufgabe 4 und 5,
nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es 0.5 Punkte, jedes falsche Kreuz gibt 0.5 Punkte Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für eine MC-Teilaufgabe (nummeriert von (a)-(c)) erreicht wird, werden für die Teilaufgabe null Punkte verrechnet.*

1. *(Projektionen)*(4P)
Für einen gegebenen Spaltenvektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt die Matrix $\mathbf{M} := \mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbf{I}$ ist die $n \times n$-Einheitsmatrix). Für welche Vektoren $\mathbf{a}$ ist diese eine *Projektion*? ist diese

1. Wir verwenden die Definition der Projektion:
$\underline{M}^2 \overset{!}{=} \underline{M}$ 1P. Es muss folglich gelten
$$\underline{M} \cdot \underline{M} = (\underline{I} - \underline{a}\underline{a}^T)(\underline{I} - \underline{a}\underline{a}^T) = \underbrace{\underline{I} - \underline{a}\underline{a}^T}_{\underline{M}} - \underline{a}\underline{a}^T + \underline{a}\underbrace{\underline{a}^T\underline{a}}_{\|\underline{a}\|^2}\underline{a}^T \quad \text{1P}$$
$$= \underline{M} \underbrace{- \underline{a}\underline{a}^T + \|\underline{a}\|^2 \underline{a}\underline{a}^T}_{\overset{!}{=} 0} \quad \text{1P}$$
$\Leftrightarrow \|\underline{a}\|^2 = 1$ 0.5P oder $\underline{a} = \underline{0}$ 0.5P
Somit ist $\underline{M}$ eine Projektion, genau dann wenn $\underline{a}$ Länge 1 hat, oder $\underline{a} = \underline{0}$ ist.

2. *(Kern und Rang einer Matrix)*(5P)
Bestimmen Sie Kern und Rang der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1}^T & \alpha \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n,n}$$

in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ und vom rellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\mathbf{I}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Einheitsmatrix und $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ der Spaltenvektor mit allen Komponenten $= 1$. $\in \mathbb{R}$

2. $\text{Kern}(\underline{A}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{A}\underline{x} = \underline{0}\}$ 1P
Wir bringen A in Zeilenstufenform (Gauss): $z_n - \sum_{i=1}^{n-1} z_i$ 2P
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha-(n-1) & 0 \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{cases} \underline{0} & \alpha \neq n-1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \; t \in \mathbb{R} & \alpha = n-1 \quad \text{1P} \end{cases} \Rightarrow \text{Kern}\,\underline{A} = \begin{cases} \{\underline{0}\} & \alpha \neq n-1 \\ \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} & \alpha = n-1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{Rang}\,\underline{A} = n - \dim \text{Kern}\,\underline{A} = \begin{cases} n & \alpha \neq n-1 \\ n-1 & \alpha = n-1 \end{cases} \quad \text{1P}$$

Alternativ:
$$\underline{A}\underline{x} = 0 \Leftrightarrow x_i + x_n = 0, \; i = 1, \dots, n-1$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \alpha x_n = 0 \quad \text{1P}$$

$$\Rightarrow x_i = -x_n \Rightarrow -(n-1)x_n + \alpha x_n = 0 \overset{\text{1P}}{\Rightarrow} x_n = 0 \text{ für } \alpha \neq n-1$$
$$\alpha = n-1 \underset{\text{1P}}{\Rightarrow} x_n \text{ beliebig}, \; x_i = -x_n \Rightarrow \text{Kern}(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{1P}$$

3. *(Kleinste-Quadrate-Problem)*(4P)
Sei $n \in \mathbb{N}$ **gerade**. Die $n \times 2$-Matrix $\mathbf{A}$ habe die Einträge $a_{ij} = (-1)^{(i-1)(j-1)}$, also die Gestalt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Man berechne die Kleinste-Quadrate-Lösung des überbestimmten linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^1 = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

3. Wir berechnen die Normalengleichungen: $\underline{A}^T\underline{A}\,\underline{x} = \underline{A}^T\underline{e}^1$ 1P

$\underline{A}^T\underline{A} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ 1P (da n gerade ist werden die alternierenden Summen abseits der Diagonalen zu 0)

$\underline{A}^T\underline{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1P

Somit erfüllt die kleinste Quadrate Lösung: $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und lautet folglich $\underline{\underline{\underline{x} = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \end{pmatrix}}}$. 1P

Abbildungen realisiert durch MATLAB-Funktionen

4. *(Multiple Choice: Abbildungen realisiert durch MATLAB-Funktionen)* (4.5 P)

Wir betrachten MATLAB-Funktionen der allgemeinen Form

```
function y = f(a,x)
```

die zwei Spaltenvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ als Argumente a und x nehmen und dann in y einen Spaltenvektor $\mathbf{y}$ der Länge m zurückgeben, wobei $m \neq n$ möglich ist. Für festen *Parametervektor* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ realisieren diese Funktionen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$.

Kreuzen Sie an, welche Aussagen über die Abbildung $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ für die im Folgenden konkret gegebenen Funktionen richtig sind.

(a)

```
function y = f(a,x)
y = [x(2:2:end);-x(1:2:end)];
```

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \\ -x_1 \\ -x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \end{pmatrix}}_{n \text{ gerade}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_1 \\ -x_3 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}}_{n \text{ ungerade}} \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ ist linear ☒ Richtig. ○ Falsch.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \dots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ☒ Falsch.

$$\mathbb{R}^{2n} \ni \mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2n,n}} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ☒ Falsch.

(b)

```
function y = f(a,x)
n = length(x);
y =
  sparse(1:n,[(2:n),1],[a(1:n-1),norm(x)],n,n)*x;
```

Grund für Nichtlinearität

$\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ ist linear ○ Richtig. ⊗ Falsch.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \|\mathbf{x}\| & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

⊗ Richtig. ○ Falsch.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \|\mathbf{x}\| & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ⊗ Falsch.

(c)

```
function y = f(a,x)
n = length(a);
y = a*ones(1,n)*x
```

$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (1, \ldots, 1) \cdot \underline{x}$

$\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ ist linear ⊗ Richtig. ○ Falsch.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ⊗ Falsch.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

⊗ Richtig. ○ Falsch.

5. *(Multiple Choice: Selbstabbildungen der Ebene)* (4P)

In dieser Aufgabe sind Veranschaulichungen von Abbildungen $\mathsf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abbildung 1 und Abbildung 2 gegeben, wobei F jeweils das schwarze A in das graue A überführt. Geben Sie an, ob F eine lineare Abbildung darstellt und wählen Sie gegebenenfalls die richtige Koeffizientenmatrix von F an (bezüglich der Kartesischen Basis).

(a) Die Abbildung $\mathsf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bildet das schwarze A auf das graue A ab. Kreuzen Sie an, ob die unten stehenden Aussagen richtig oder falsch sind.

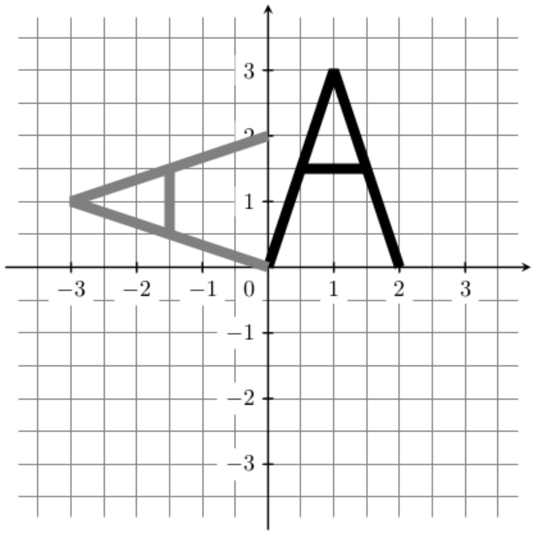

Abbildung 1: Teilaufgabe 5.(i)

$\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$	◯ Richtig.	☒ Falsch.
$\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$	☒ Richtig.	◯ Falsch.
$\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$	◯ Richtig.	☒ Falsch.
F ist keine lineare Abbildung.	◯ Richtig.	☒ Falsch.

es handelt sich um eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn um 90°,

$F(x) = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$.

F ist somit eine lineare Abbildung.

(b) Die Abbildung $\mathsf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bildet das schwarze A auf das graue A ab. Kreuzen Sie an, ob die unten stehenden Aussagen richtig oder falsch sind.

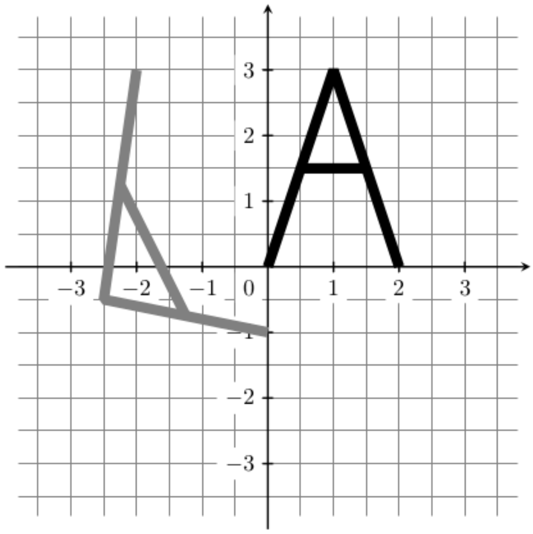

Abbildung 2: Teilaufgabe 5.(ii)

$\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$	○ Richtig.	⊗ Falsch.
$\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$	○ Richtig.	⊗ Falsch.
$\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$	○ Richtig.	⊗ Falsch.
F ist keine lineare Abbildung.	⊗ Richtig.	○ Falsch.

Damit eine dieser Aussagen stimmt, muss gelten $F(\underline{0}) = \underline{0}$. Dies ist auch eine Bedingung, welche eine lineare Abbildung per Definition erfüllen muss. Dies ist hier aber nicht der Fall.