Lösung Mittsemesterprüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

D-BAUG

HS 2013

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen,
abgesehen von Aufgabe 1 und 2,
nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für eine MC-Aufgabe erreicht wird, werden für die Aufgabe null Punkte verrechnet.*

1. *(Multiple Choice: Affiner Raum)* (5P)

   Kreuzen Sie an, welche der folgenden Mengen einen *affinen Raum* des angegebenen Vektorraums bilden.

   (a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - 4x_2 - x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$

   ⊗ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

   Die Menge ist ein affiner Raum, da

   $$\begin{aligned}&\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - 4x_2 - x_3 = 5\right\} \\ &\qquad = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle \mathbf{x} - \mathbf{q}, (1,-4,-1)^\top \rangle = 0\,,\ \textit{wobei}\ \mathbf{q} = (0,-1,-1)^T\right\}\,.\end{aligned}$$

   (b) $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{j=1}^n jx_j = 1\right\} \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$

   ⊗ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

   Die Menge ist ein affiner Raum, da

   $$\begin{aligned}&\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{j=1}^n jx_j = 1\right\} \\ &\qquad = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \mathbf{x} - \mathbf{q}, (1,2,\dots,n)^\top \rangle = 0\,,\ \textit{wobei}\ \mathbf{q} = (1,0,\dots,0)^T\right\}\,.\end{aligned}$$

   (c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und zwei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ungleich dem Nullvektor

   ○ ist ein affiner Raum. ⊗ ist kein affiner Raum.

   Die Menge ist kein affiner Raum, da z.B. für $n = 2$, $\mathbf{a} = (1,0)^\top$, $\mathbf{b} = (0,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ *gilt:*

   $$\begin{aligned}A &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0\right\} \\ &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \cdot x_2 = 0\right\}\,.\end{aligned}$$

   Damit A *einen affinen Raum bildet, müssen wir ein* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ *finden, sodass* $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathbf{x} + \mathbf{c} \in A\}$ *einen Untervektorraum des* $\mathbb{R}^2$ *bildet. Per Definition gilt*

   $$U = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_1 + c_1) \cdot (x_2 + c_2) = 0\right\}.$$

   Für $\mathbf{x} = (1, -c_2)^\top$ *und* $\mathbf{y} = (-c_1, 1)^\top \in U$ *ist die Summe* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1 - c_1, 1 - c_2)^\top$ *nicht in* U *enthalten, was der Definition eines Unterraumes widerspricht.*

   (d) $\{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3 \,:\, \mathbf{p}'(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}_3$

   ⊗ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

Ist ein affiner Raum, da

$$
\begin{aligned}
A := \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3 \,:\, \mathbf{p}'(x) = 1 \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \\
= \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3 \,:\, \mathbf{p}(x) = x + c \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}, \textit{ wobei } c \in \mathbb{R} \textit{ beliebig}\} \\
= \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3 \,:\, \mathbf{p}(x) = \mathbf{q}(x) + c \cdot \mathbf{h}(x) \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}, \\
\textit{wobei } c \in \mathbb{R} \textit{ beliebig}, \mathbf{h}(x) = 1, \mathbf{q}(x) = x \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \;.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $A = \mathbf{q} + U$*, wobei* $U = \mathsf{Span}\{\mathbf{h}\}$*, mit* $\mathbf{h}(x) = 1$ *und* $\mathbf{q}(x) = x$ *für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$*.*

(e) $\{\mathbf{f} \in C([0,1]) \,:\, \mathbf{f}(x) \geq 0 \text{ für alle } 0 \leq x \leq 1\} \subset C([0,1])$.

○ ist ein affiner Raum. ⊗ ist kein affiner Raum.

Die Menge ist kein affiner Raum. Würde

$$A := \{\mathbf{f} \in C([0,1]) \,:\, \mathbf{f}(x) \geq 0 \textit{ für alle } 0 \leq x \leq 1\}$$

einen affinen Raum in $C([0,1])$ *bilden, hätte die Menge die Form*

$$A = \mathbf{q} + U\,,$$

wobei $\mathbf{q} \in C([0,1])$ *und* $U \subset C([0,1])$*, ein Untervektorraum. Da* $\mathbf{0} \in A$ *und zudem* $\mathbf{0} \in U$ *(per Definition eines Untervektorraums), muss gelten* $\mathbf{q} = \mathbf{0}$*, also* $A = U$ *und somit bleibt zu zeigen, dass* $A \subset C([0,1])$ *einen Untervektorraum bildet.*
Für die Funktion $\mathbf{f} \in C([0,1])$ *mit* $\mathbf{f}(x) = 1$ *für alle* $x \in [0,1]$ *gilt, dass* $\mathbf{f}(x) > 0$ *und somit* $\mathbf{f} \in A$*. Für* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $\alpha < 0$ *gilt jedoch* $\alpha \cdot \mathbf{f}(x) < 0$ *und somit* $\alpha \cdot \mathbf{f} \notin A$*. Das bedeutet per Definition, dass* A *kein Untervektorraum ist.*

2. *(Multiple Choice: Vektoridentitäten)* (5P)

Sei $(V, +, \cdot)$ einen Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\|v\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ repräsentiert. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Identitäten für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in (V, +, \cdot)$ richtig oder falsch sind.

(a) $\|\mathbf{v}\| > 0$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

Aussage gilt nicht für $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(b) $\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$. ⊗ Richtig. ○ Falsch.

Aussage gilt :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &\overset{\textit{Linearität}\langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \\ &\overset{\textit{Linearität}\langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \|v\|^2 - \|w\|^2 .\end{aligned}$$

(c) $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$, für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

Aussage gilt nicht für $\alpha < 0$. *Gegenbeispiel:*

$$\|(-1) \cdot (1, 0, 0)^\top\| \neq (-1) \cdot \|(1, 0, 0)^T\|$$

(d) $\langle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$. ○ Richtig. ⊗ Falsch.

Aussage gilt nicht, falls $\mathbf{w}$ *nicht Länge* 1 *hat. So gilt zum Beispiel für* $\mathbf{v} = (1, 0)^\top$, $\mathbf{w} = (1, 1)^\top \in \mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -1 \neq 0 .\end{aligned}$$

(e) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$. ⊗ Richtig. ○ Falsch.

Aussage gilt: Berühmte Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

3. *(Orthogonalität)* (8P)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es seien die Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ aus V gegeben. Zudem definieren wir $\mathbf{z} \in V$ als

$$\mathbf{z} := \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w} .$$

(a) Beweisen Sie: $\mathbf{z}$ ist orthogonal zu $\mathbf{w}$. (2P)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{z}$ im Allgemeinen nicht orthogonal zu $\mathbf{v}$ steht, indem Sie ein konkretes Gegenbeispiel mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$ geben. (2P)

(c) Sei $V = \mathbb{P}_2$ mit der Standard-Vektoraddition und skalaren Multiplikation gegeben. Zudem sei das Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)\, \mathrm{d}x .$$

Berechnen Sie $\mathbf{z}$ für $\mathbf{v}(x) = x$, $\mathbf{w}(x) = 1$. (4P)

Lösung:

(a) *Es ist zu zeigen:* $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = 0$.
Beweis:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle &\overset{\text{Def. } \mathbf{z}}{=} \langle \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &\overset{\text{Linearität } \langle \cdot,\cdot \rangle}{=} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) *Wir wählen* $\mathbf{v} = (0, 1)^\top$, $\mathbf{w} = (1, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$. *Somit gilt*

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

Dies ergibt den Widerspruch zur Behauptung, dass $\mathbf{z}$ *und* $\mathbf{v}$ *orthogonal zueinander stehen.*

(c) *Wir berechnen zuerst* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *und* $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$*:*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \int_0^1 x \cdot 1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} , \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle &= \int_0^1 1 \cdot 1 \mathrm{d}x = x \Big|_0^1 = 1 . \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w} \\ &= x - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

4. *(Analytische Geometrie, MATLAB)* (6P)

(a) Gegeben sei die unten gegebene Funktion `plotsomething(a,b)`. Zeichnen Sie die Ausgabe für `plotsomething([3;4],[-3;4])`. (4P)

```
function plotsomething(a,b)
    na = norm(a);
    nb = norm(b);
    x = a/na + b/nb;
    y = a/na - b/nb;
    plot([x(1);y(1)],[x(2);y(2)],'*-');
    axis([0,2,0,2]);
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    title('Ausgabe von plotsomething()');
end
```

(b) Welche Matrix ergibt die Eingabe

```
A = [1,ones(1,3);zeros(3,1),diag([1;2;3])]
```

in MATLAB? Geben Sie die Matrix **A** an. (2P)

Lösung:

(a) Siehe Abbildung 1.

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

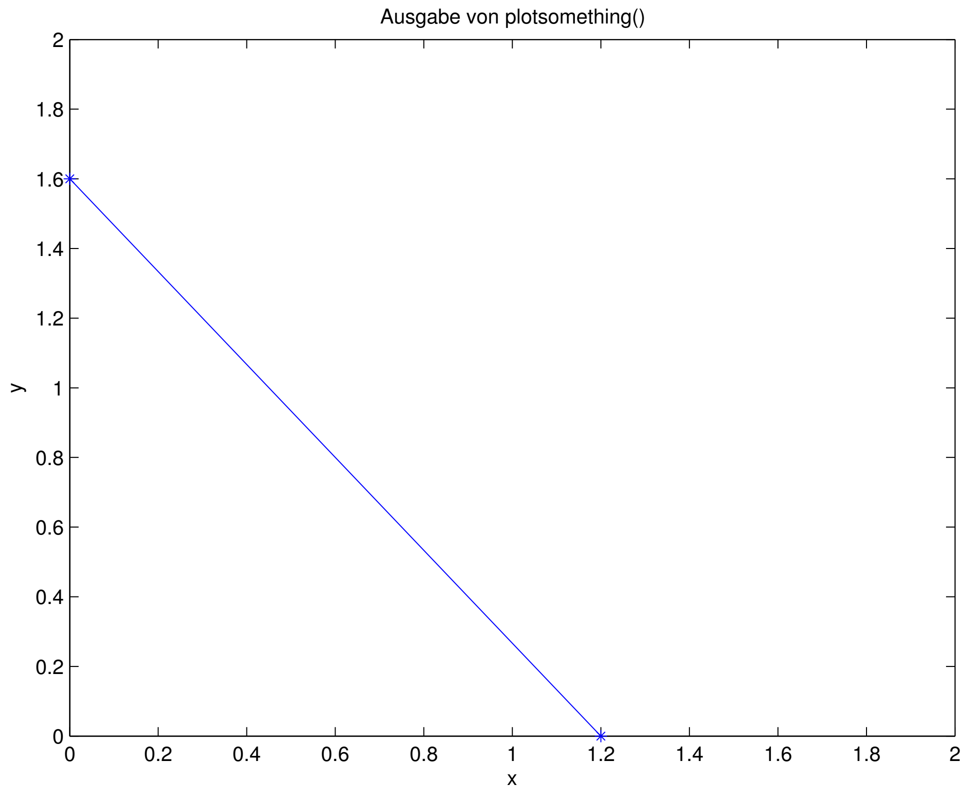

Abbildung 1: Ausgabe von plotsomething([3;4],[-3;4])