Mittsemesterprüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

HS 2013

Prof. R. Hiptmair

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	10.10.2013	

1	2	3	4	Total

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- Aufgabenblätter sind in den braunen Kuverts.
  Diese bitte mit Ihrem Namen beschriften.
- **Braune Kuverts dürfen erst auf Anweisung geöffnet werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- Prüfungsdauer: 20 Minuten.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- **Nach Prüfungsende die ausgefüllten Aufgabenblätter bitte in das mit Ihrem Namen beschriftete braune Kuvert stecken.**

Viel Erfolg!

Mittsemesterprüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

D-BAUG

HS 2013

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen,
abgesehen von Aufgabe 1 und 2,
nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für eine MC-Aufgabe erreicht wird, werden für die Aufgabe null Punkte verrechnet.*

1. *(Multiple Choice: Affiner Raum)* (5P)

   Kreuzen Sie an, welche der folgenden Mengen einen *affinen Raum* in dem angegebenen Vektorraum bilden.

   (a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - 4x_2 - x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$

   ○ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

   (b) $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{j=1}^{n} jx_j = 1\right\} \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$

   ○ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

   (c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}\rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ungleich dem Nullvektor

   ○ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

   (d) $\{\mathbf{p} \in \mathbb{P}_3 \,:\, \mathbf{p}'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}_3$

   ○ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

   (e) $\{\mathbf{f} \in C([0,1]) \,:\, \mathbf{f}(x) \geq 0$ für alle $0 \leq x \leq 1\} \subset C([0,1])$

   ○ ist ein affiner Raum. ○ ist kein affiner Raum.

Platz für Notizen (werden nicht bewertet):

2. *(Multiple Choice: Vektoridentitäten)* (5P)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\|v\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Kreuzen Sie an, ob die folgenden Identitäten *für alle* Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in (V, +, \cdot)$ richtig sind.

(a) $\|\mathbf{v}\| > 0\,.$ ○ Richtig. ○ Falsch.

(b) $\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2\,.$ ○ Richtig. ○ Falsch.

(c) $\|\alpha \mathbf{v}\| = \alpha \|\mathbf{v}\|$, für alle $\alpha \in \mathbb{R}\,.$ ○ Richtig. ○ Falsch.

(d) $\langle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0\,.$ ○ Richtig. ○ Falsch.

(e) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \le \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|\,.$ ○ Richtig. ○ Falsch.

Platz für Notizen (werden nicht bewertet):

3. *(Orthogonalität)* (8P)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es seien die Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ aus V gegeben, $\mathbf{w} \neq 0$. Zudem definieren wir $\mathbf{z} \in V$ als

$$\mathbf{z} := \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w} \,.$$

(a) Beweisen Sie: $\mathbf{z}$ ist orthogonal zu $\mathbf{w}$. (2P)

3.(a)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{z}$ im Allgemeinen nicht orthogonal zu $\mathbf{v}$ steht, indem Sie ein konkretes Gegenbeispiel mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$ geben, wobei im $\mathbb{R}^2$ das Euklidische Skalarprodukt verwendet werden soll. (2P)

3.(b)

(c) Sei nun konkret $V = \mathbb{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Zudem sei das Skalarprodukt in $\mathbb{P}_2$ definiert durch

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Berechnen Sie $\mathbf{z}$ für $\mathbf{v}(x) = x$, $\mathbf{w}(x) = 1$. (4P)

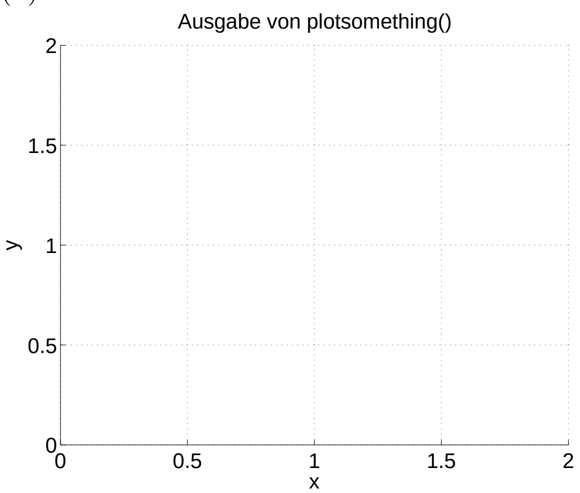
3.(c)

4. *(Analytische Geometrie, MATLAB)* (6P)

(a) Gegeben sei die unten gegebene Funktion `plotsomething(a,b)`. Zeichnen Sie die Ausgabe für `plotsomething([3;4],[-3;4])`. (4P)

```
function plotsomething(a,b)
    na = norm(a);
    nb = norm(b);
    x = a/na + b/nb;
    y = a/na - b/nb;
    plot([x(1);y(1)],[x(2);y(2)],'*-');
    axis([0,2,0,2]);
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    title('Ausgabe von plotsomething()');
end
```

4.(a)



Rechenweg:

(b) Welche Matrix ergibt die Eingabe

`A = [1,ones(1,3);zeros(3,1),diag([1;2;3])]`

in MATLAB? Geben Sie die Matrix **A** an. (2P)

4.(b)