Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Sommer 2012

Prof. H.-R. Künsch

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.
Die Lösungswege müssen, abgesehen von Aufgabe 1, nachvollziehbar dargestellt sein.

1. *Multiple Choice:*

Kreuzen Sie an, welche der Aussagen in (a) - (f) richtig sind.
Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein.
Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für Aufgabe 1 erreicht wird, werden null Punkte vergeben.

Gegeben sei die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) ○ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist eine 4×4 Matrix mit $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)_{1\,2} = 4$.

○ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist eine 5×5 Matrix mit $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)_{1\,2} = 3$.

○ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ist nicht definiert.

(b) Die Dimension des Kerns von $\mathbf{A}$ ist

○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5.

(c) Die Dimension des Bildes von $\mathbf{A}$ ist

○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5.

Zur Wiederholung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Das Bild von $\mathbf{A}$ ist gleich

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$,

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Zur Wiederholung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Der Kern von $\mathbf{A}$ ist gleich

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$

○ $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

(f) Sei

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{exakt}} - \mathbf{x}_{\text{gestört}},$$

wobei $\mathbf{x}_{\text{exakt}}$ die exakte Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{exakt}} = \mathbf{c}$$

und $\mathbf{x}_{\text{gestört}}$ die Lösung des gestörten Systems

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{gestört}} = \mathbf{c}_{\text{gestört}} = \mathbf{c}_{\text{exakt}} + \Delta \mathbf{c}.$$

Nehmen wir an, die Kondition des linearen Gleichungssystems sei 10. Dies bedeutet:

○ Wenn die rechte Seite des Gleichungssystems eine Störung von 10^{-3} aufweist, d.h. $\|\Delta \mathbf{c}\| = 10^{-3}$, dann ändert sich die Lösung um maximal 10^{-2}.

○ Wenn die rechte Seite des Gleichungssystems eine Störung von 0.1% aufweist, d.h. $\|\Delta \mathbf{c}\| = 10^{-3}\|\mathbf{c}\|$, dann ändert sich die Lösung um maximal 1%.

2. (a) Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem abhängig vom reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x_1 & + & (1+3\alpha)\,x_2 & + & (\alpha+6)\,x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \alpha\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & (3+2\alpha)\,x_2 & + & (\alpha^2+3\alpha+3)\,x_3 & = & \alpha+2 \end{array}$$

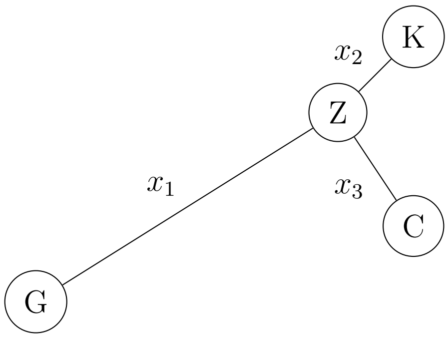
Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau (Schema) und wenden Sie das Gausssche Eliminationsverfahren darauf an, um das Tableau in Zeilenstufenform zu bringen.

(b) Gegeben sei folgendes Endschema in Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \\ \hline \end{array}$$

Für welche reellen Parameter α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele bzw. keine Lösung?
Bestimmen Sie die Lösungsmenge zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist.

3. Auf verschiedenen Autobahnfahrten zwischen Zürich (Z), Chur (C), Konstanz (K), Genf (G) werden auf dem Kilometerzähler folgende Distanzen abgelesen:



Z-K	G-K	C-G	C-K	Z-C
70	350	400	200	100

(a) Lesen Sie alle Gleichungen für die Längen x_1, x_2, x_3 der Teilstrecken Z-G, Z-K, Z-C ab und schreiben Sie diese in der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

(b) Zeigen Sie, dass die beste approximative Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate gegeben ist durch $x_1^* = 280$, $x_2^* = 75$ und $x_3^* = 115$.

(c) Wir nehmen nun an, dass die exakten Distanzen x_1, x_2, x_3 gleich x_1^*, x_2^*, x_3^* aus (b) sind. Welchen Fehler hat dann der Kilometerzähler in den 5 obigen Fahrten jeweils gemacht?

4. Gegeben sei folgende Dreiecksmatrix :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Dreiecksmatrix $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.

(c) Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar? Geben Sie eine Diagonalisierung an, oder begründen Sie, weshalb keine existiert.

5. Ziel dieser Aufgabe ist das Finden einer Nullstelle der nichtlinearen Funktion

$$f((x,y)^T) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y + xy \\ xy + x - y - 1 \end{pmatrix}$$

mithilfe von numerischen Verfahren.

(a) Berechnen Sie die Jacobi Matrix $\mathrm{d}f\big((x,y)^T\big)$ d.h. die Matrix der partiellen Ableitungen von f.

(b) Schreiben Sie die Gleichung für die Newtoniteration auf und berechnen Sie den ersten Newtonschritt für den Startwert $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{1}{2}, -1)^T$ exakt (d.h. ohne numerische Näherung der Zahl e).

(c) Was passiert im nächsten Newtonschritt?

6. Gegeben sei folgendes System von linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = 8x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = 6x_1 + 3x_2.$$

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Systems zur Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = (1,\ 1)^T.$$

(c) Berechnen Sie die explizite Eulerapproximation von $\mathbf{x}(1)$ zur Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = (1,\ 1)^T$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.