Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Winter 2012

Prof. D. Stoffer

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3t \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die zweite Spalte von AB und die dritte Zeile von BA.

b) Ohne A^{-1} zu berechnen, bestimmen Sie alle t, für welche A^{-1} existiert, und geben Sie $A^{-1}c$ an.

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c der Grösse $Z = au+bv+cw$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

u_i	1	-1	1	-1	0	2
v_i	2	0	1	1	-1	-1
w_i	1	-1	2	0	1	-1
Z_i	3	-2	3	2	1	-2

3. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Bestimmen Sie den dritten Eigenwert.

b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung

$$\ddot{x}(t) = Ax(t).$$

4. Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 - 4xy + y^3 - 1 &= 0 \\ x^2y^2 - x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

soll mit dem Newtonverfahren approximativ gelöst werden.

a) Beschreiben Sie einen Iterationsschritt.

b) Führen Sie einen Schritt durch mit Startwert $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

c) Was passiert im ersten Schritt, wenn $x_0 = y_0$ gewählt wird?

5. Das Integral

$$I = \int_0^1 x^{3/2} f(x) \mathrm{d}x$$

soll mit der Formel

$$\hat{I} = w_1 f(q) + w_2 f(1), \qquad 0 < q < 1,$$

approximiert werden, wobei die drei Parameter w_1, w_2, q noch zu bestimmen sind.

a) Stellen Sie die drei Gleichungen für w_1, w_2, q auf, damit die Formel $\hat{I}$ für quadratische Polynome exakt ist.

b) Bestimmen Sie w_1, w_2 in Abhängigkeit von q, so dass $\hat{I}$ für Polynome vom Grad 1 exakt ist.

c) Bestimmen Sie q, w_1 und w_2, so dass die drei Gleichungen von **(a)** erfüllt sind.

d) Approximieren Sie mit Ihrer Formel das Integral $I = \int_0^1 x^{3/2} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x$ und geben Sie den relativen Fehler an (der exakte Wert ist $I = \pi/2 - 4/3$).

6. **(Numerische Differentiation)** Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion f an der Stelle x_0 soll durch den Differenzenquotienten

$$g(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

approximiert werden.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion g gerade ist.

b) Setzen Sie $f(x) = 2^x$ und $x_0 = 0$. Bestimmen Sie $g(h)$ für $h = 1, 1/2, 1/4$.

c) Geben Sie eine verbesserte Approximation an, indem Sie das Interpolationspolynom an der Stelle $h = 0$ auswerten. Beachten Sie, dass $g(h)$ in geraden Potenzen von h entwickelt werden kann.

d) Bestimmen Sie den relativen Fehler Ihrer verbesserten Approximation.

Hinweis: $f'(0) = \ln(2)$.

Viel Erfolg!