Serie 1

1. *(Online-Aufgabe)*

1. Finden Sie durch Ausschreiben der Summen heraus, welche der folgenden Aussagen richtig sind für beliebige Wahl von $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$

(b) $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{n+1-k}$

(c) $\sum_{i=1}^n (ax_i + b) = a\big(\sum_{i=1}^n x_i\big) + b$

(d) $\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) = \big(\sum_{i=1}^n x_i\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^n y_i\big)$

(e) $\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j) = 0$

(f) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j = \big(\sum_{i=1}^n x_i\big) \cdot \big(\sum_{j=1}^n y_j\big)$

(g) $(a-1)\left(\sum_{i=0}^n a^i\right) = a^n - 1$

2. Im Nachfolgenden stellen wir das Ziffernblatt einer Uhr mithilfe der Einheitsscheibe (mit Radius 1 und Scheibenmittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$) dar.

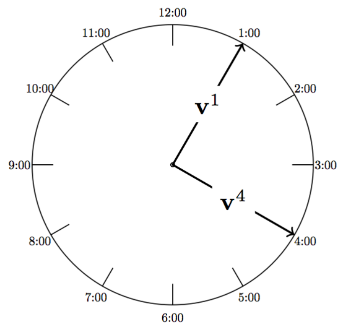
(a) Was ist die Summe $\mathbf{s}$ der zwölf Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{12}$, welche vom Mittelpunkt der Uhr zu den Zeiten 1:00 Uhr, 2:00 Uhr, ..., 12:00 Uhr zeigen?

(b) Bestimmen Sie die Summe der verbleibenden elf Vektoren, wenn der Vektor $\mathbf{v}^4$, welcher zu 4:00 Uhr zeigt, herausgenommen wird.

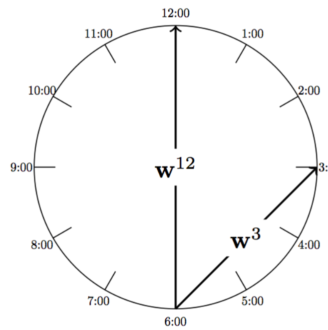
(c) Nehmen Sie an, der Vektor $\mathbf{v}^1$, welcher zu 1:00 Uhr zeigt, sei halbiert. Addieren Sie ihn zu den anderen elf Vektoren $\mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^{12}$.

(d) Nehmen Sie an, dass sich der Scheibenmittelpunkt nun in $(0, 1)$ befindet. Wir definieren nun zwölf neue Vektoren $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{12}$ welche vom Ursprung $(0, 0)$ aus zu den Zeiten 1:00 Uhr, 2 : 00 Uhr, ..., 12 : 00 Uhr zeigen. Bilden Sie die Summe der neuen Vektoren $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{12}$.

Bitte wenden!



(a) Skizze zu Aufgaben **2.**(a)-(c)



(b) Skizze zu Aufgabe **2.**(d)

3. Für die nachstehenden Teilaufgaben wiederholen wir die *grundlegenden Eigenschaften der Vektoroperationen eines Vektorraums* $(V, +, \cdot)$:

Für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
2. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$.
3. Es gibt einen eindeutigen Nullvektor $\mathbf{0}$, sodass $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.
4. Für jedes $\mathbf{v}$ gibt es einen eindeutigen Vektor $-\mathbf{v}$, sodass $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
5. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
6. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$.
7. $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$.
8. $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$.

(a) Gegeben sei $(\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot)$. Nehmen Sie an, dass die Additionsvorschrift $\oplus$ in $\mathbb{R}^2$ wie folgt definiert ist

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = (v_1, v_2)^\top \oplus (w_1, w_2)^\top := (v_1 + w_2, v_2 + w_1)^\top.$$

Zudem sei die gewöhnliche Vorschrift für die Multiplikation mit Skalaren $\cdot$ gegeben durch

$$\alpha \cdot \mathbf{v} := (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2)^\top.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot)$ keinen Vektorraum bildet, indem Sie die acht *grundlegenden Eigenschaften der Vektoroperationen eines Vektorraums* überprüfen. Welche der Eigenschaften sind erfüllt? Welche sind nicht erfüllt?

(b) Gegeben sei $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$. Nehmen Sie an, dass die skalare Multiplikation $\odot$ gegeben ist durch $\alpha \odot \mathbf{v} := (\alpha \cdot v_1, 0)^\top$. Mit $+$ bezeichnen wir die gewöhnliche Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)^\top.$$

Sind für $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ alle *grundlegenden Eigenschaften der Vektoroperationen eines Vektorraums* erfüllt?

4. Wir betrachten den Vektorraum $C(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), +, \cdot)$, den Vektorraum der stetigen Funktionen über $\mathbb{R}$. Für zwei stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$, ist die gewöhnliche punktweise Additionsvorschrift $+$ folgendermassen definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Die gewöhnliche skalaren Multiplikationsvorschrift $\cdot$, für einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

(a) Wir betrachten $(C(\mathbb{R}), +, \odot)$. Nehmen Sie an, dass folgende Vorschrift für die Multiplikation mit einem Skalar α gilt:

$$(\alpha \odot f)(x) := f(\alpha \cdot x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Welche der *grundlegenden Eigenschaften der Vektoroperationen eines Vektorraums* (siehe Aufgabe **3.**) ist nicht erfüllt? Beachten Sie, dass wir die gewöhnliche punktweise Additionsvorschrift $+$ verwenden (siehe Gleichung (1)).

(b) Wir betrachten $(C(\mathbb{R}), \oplus, \cdot)$, wobei die Additionsvorschrift für die "Vektoren" f und g gegeben ist durch

$$(f \oplus g)(x) := f(g(x)), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Der "Nullvektor" ist folglich gegeben durch $e(x) = x$. Beachten Sie, dass wir die gewöhnliche skalare Multiplikationsvorschrift $\cdot$ verwenden (siehe Gleichung (2)). Welche der *grundlegenden Eigenschaften der Vektoroperationen eines Vektorraums* sind nicht erfüllt?

5. Welche der folgenden Untermengen des $\mathbb{R}^3$ (versehen mit der gewöhnlichen punktweisen Addition $+$ und gewöhnlichen skalaren Multiplikation $\cdot$) sind Untervektorräume des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

(a) Die Ebene $\{(v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : v_1 = v_2\}$.

(b) Die Ebene $\{(v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 1\}$.

(c) Die Vektoren, welche in der Menge $\left\{(v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = 0\right\}$ liegen.

(d) Alle Vektoren der Menge $\{(v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$.

(e) Alle Vektoren der Menge $\{(v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : v_1 \leq v_2 \leq v_3\}$.

(f) Alle Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{v} = (1, 4, 0)^\top$ and $\mathbf{w} = (2, 2, 3)^\top$.

Für die nachstehenden Teilaufgaben wiederholen wir, dass $C(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen über $\mathbb{R}$ repräsentiert, während $\mathcal{P}_n = (\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ die Menge aller Polynome vom Grad kleiner (oder gleich) n darstellt. Beide Vektorräume versehen wir mit der gewöhnlichen punktweisen Addition $+$ und der skalaren Multiplikation $\cdot$ (siehe Gleichungen (1) und (2) in Aufgabe **4.**).

(g) Ist $\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ ein Untervektorraum von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

(h) Ist $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 1\}$ ein Untervektorraum von $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$?

(i) Ist $\{p \in \mathcal{P}_7 : p(0) = 2p'(0)\}$ ein Untervektorraum von $(\mathcal{P}_7, +, \cdot)$?

Bitte wenden!

Allgemeine Informationen:

- **Übungsgruppen:** Die Übungsstunden finden jeweils donnerstags von 14:15-15:00 Uhr respektive von 15:15-16:00 Uhr statt. Sie erhalten eine Mail mit einem Link, um sich in eine der Übungsgruppen einzuschreiben. *Achtung:* Falls Sie sich noch nicht in die Vorlesung eingeschrieben haben, so tun Sie dies bitte baldmöglichst. Beachten Sie auch den Terminkonflikt mit den Analysis I Übungen.

Gruppe	Raum	AssistentIn	Email
1 \ 2	CAB G 56	Florian Zeiser	`fzeiser@student.ethz.ch`
3 \ 4	ETZ J 91	Raoul Bourquin	`raoul.bourquin@sam.math.ethz.ch`
5 \ 6	HG F 26.3 \ ETZ E 6	Daniele Casati	`dcasati@student.ethz.ch`
7 \ 8	HG E 33.1	Željko Kereta	`zeljko.kereta@math.ethz.ch`
9 \ 10	ML F 38	Elke Spindler	`elke.spindler@sam.math.ethz.ch`
11 \ 12	ML F 39	Florian Scherrer	`floscher@student.ethz.ch`
13 \ 14	RZ F 21	Roman Hettelingh	`heroman@student.ethz.ch`

- **Koordinatoren:** Željko Kereta, HG G 56.2 und Elke Spindler, HG G 53.1
- **Testatbedingung:** keine.
- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 26.09.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterprüfungen:** Es gibt zwei 20−minütige Semesterprüfungen, welche jeweils in der Vorlesung stattfinden. Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Zusammenfassung etc.) erlaubt.
  - Die **Zwischensemesterprüfung** findet am **Donnerstag, den 10.10.2013** statt.
  - Die **Endsemesterprüfung** findet am **Donnerstag, den 19.12.2013** statt.
- **Zulassungsbedingung für Sessionsprüfung:** Es müssen mindestens 40% der Punkte in EINER der beiden Semesterprüfungen erreicht werden.
- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 16:00 Uhr, ETH Zentrum, ML F 34.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG