Serie 2

1. *(Online-Aufgabe)*

In der Vorlesung wurden Teilmengen von Vektorräumen durch Mengen von Linearkombinationen definiert, so etwa der span einer Menge von Vektoren. Hier sehen wir eine andere wichtige Klasse von Teilmengen eines Vektorraumes, nämlich die *konvexen Mengen*.
Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine Teilmenge $M \subset V$ heisst *konvex*, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in M$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$$\lambda \cdot \mathbf{v} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{w} \in M\,.$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen zutreffen.

1. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Teilmengen $M \subset V$ sind *konvex*?

(a) $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \;:\; \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} < 1\}$

(b) $M_{\mathbf{w}} = \{\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w} \;:\; \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n,\ \text{sodass}\ \|\tilde{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2} < 1\}$, für fixes, aber beliebiges $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

(c) $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \;:\; (v_2)^2 < 2v_1\}$

(d) $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \;:\; (v_2)^2 \geq 2v_1\}$

2. Sei $V = \mathbb{P}_n = \{p(x) = \sum_{i=0}^n p_i\, x^i \;:\; x \in \mathbb{R},\ p_i \in \mathbb{R}\ \text{für alle}\ i = 0, \ldots, n\}$, der Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich n. Welche der folgenden Teilmengen $M \subset V$ sind *konvex*?

(a) $M = \{p \in \mathbb{P}_n \;:\; 1 \leq |p_i| \leq 2,\ \text{für alle}\ i = 0, 1 \ldots, n\}$

(b) $M = \{p \in \mathbb{P}_n \;:\; |p_i| \leq 2,\ \text{für alle}\ i = 0, 1, \ldots, n\}$

(c) $M = \{p \in \mathbb{P}_n \;:\; |p(x)| \leq 2,\ \text{für alle}\ x \in [0, 1]$

2. Gegeben sei das Dreieck ABC, welches Sie in Abbildung 1a finden.

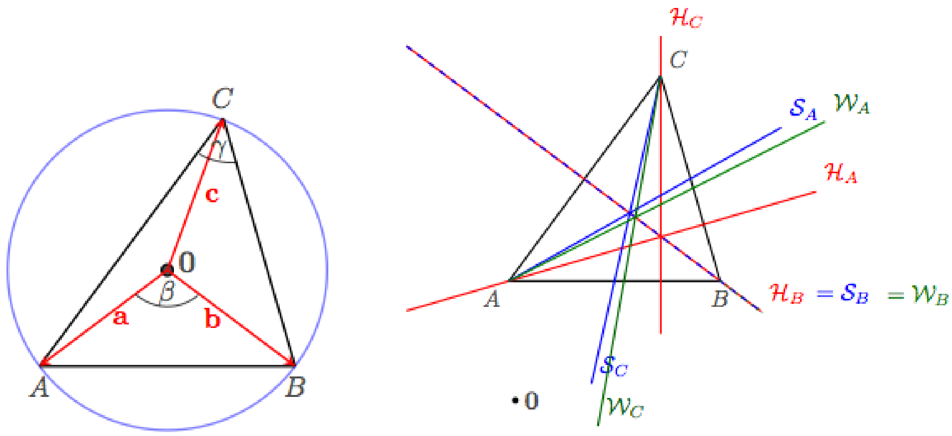
(a) Zeigen Sie mithilfe elementarer Geometrie, dass $2\gamma = \beta$.

(b) Versuchen Sie den Nachweis von

$$2\gamma = \beta$$

mithilfe analytischer Geometrie.
Hinweis: Verwenden Sie die folgende trigonometrische Identität: $\cos(2 \cdot \alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

Bitte wenden!



(a) Skizze zu Aufgabe **2.** (b) Skizze zu Aufgabe **3.**

Abbildung 1: Skizzen

3. Gegeben sei das Dreieck ABC in Abbildung 1b.

(a) Wir nehmen an, dass $A = -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Geradengleichungen $\mathcal{G}$ der Form

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{q} + \tau \cdot \mathbf{w} \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}, \text{ wobei } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\},$$

für

(i) die drei Seitenhalbierenden $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$.
(ii) die drei Höhen $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C$.
(iii) die drei Winkelhalbierenden $\mathcal{W}_A, \mathcal{W}_B, \mathcal{W}_C$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeinen Formeln für beliebige Punkte $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, d.h. bestimmen Sie die allgemeinen Geradengleichungen für

(i) die drei Seitenhalbierenden $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$.
(ii) die drei Höhen $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C$.
(iii) die drei Winkelhalbierenden $\mathcal{W}_A, \mathcal{W}_B, \mathcal{W}_C$.

4. (a) Gegeben ist der Punkt $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir spiegeln den Punkt Q an der Ebene

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Geben Sie das Spiegelbild $Q' = \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \end{pmatrix}$ an.

Für die folgenden Teilaufgaben seien fixes $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und fixes $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben, welche die Ebene

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = \beta\}$$

charakterisieren.

(b) Wir spiegeln den Punkt $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$ an $\mathcal{H}$. Geben Sie eine allgemeine Formel für das Spiegelbild $P' = \begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{pmatrix}$ des Punktes P an.

(c) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Spiegeln Sie die Gerade

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{q} + \tau \cdot \mathbf{w} \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}$$

an $\mathcal{H}$, bzw. geben Sie $\mathbf{q}', \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^3$ des Spiegelbildes $\mathcal{G}' = \{\mathbf{q}' + \tau \cdot \mathbf{w}' \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}$ an.

(i) Wann ist $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \emptyset$?

(ii) Wann fällt die Gerade $\mathcal{G}$ mit dem Spiegelbild zusammen?

(d) Gegeben seien zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ mit $P \neq Q$. Bestimmen Sie die Spiegelebene, welche P nach Q spiegelt:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = \alpha\},$$

bzw. bestimmen Sie $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \alpha \in \mathbb{R}$. Welche Bedingungen müssen für P und Q erfüllt sein, damit gilt $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$.

5. (a) Sei $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(ii) den Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(iii) den Normalenvektor $\mathbf{n}_{\mathcal{H}}$, der senkrecht zur Ebene

$$\mathcal{H} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{c}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

steht.

(b) Verifizieren Sie die folgenden Identitäten für allgemeine Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

(ii) $\mathbf{a} \times (r\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

(iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$.

Bitte wenden!

Informationen:

- **MATLAB auf dem eigenen Computer:** Auf allen Rechnern der ETH ist MATLAB installiert. Sie können die Programmieraufgaben also problemlos auf den ETH Computern lösen. Falls Sie jedoch MATLAB auf Ihrem persönlichen Rechner installieren möchten, können Sie sich die MATLAB Software unter folgendem Link kostenlos herunterladen:

  https://ides.ethz.ch/ .

  Klicken Sie dazu auf *Katalog* und geben Sie in das Feld *Schnellsuche* den Begriff *MATLAB* ein. Bevor Sie auf den "Bestellen"-Button klicken können, müssen Sie sich mit Ihrem ETH Benutzernamen einloggen.

  Eine Installationsanleitung der Software finden Sie ebenfalls unter:

  https://stud-ides.ethz.ch/cgi-bin/copy_skeleton.fastpl?skeleton=install_software .

- **MATLAB Einführung:** Am Donnerstag, den 03.10.2012, findet während der Übungsstunde eine MATLAB Einführung in den Computerräumen HG E 26.1, HG E 26.3 und HG E 19 statt. Die Raumzuteilung lautet wie folgt nach Ihrem Assistenten:

Gruppen	Raum	AssistentIn	Zeit
1, 9, 5 / 2, 10, 6	HG E 19	Florian Zeiser & Elke Spindler & Daniele Casati	14.15-15.00 / 15.15-16.00
7, 13 / 8, 14	HG E 26.1	Željko Kereta & Roman Hettelingh	14.15-15.00 / 15.15-16.00
3, 11 / 4, 12	HG E 26.3	Raoul Bourquin & Florian Scherrer	14.15-15.00 / 15.15-16.00

  Bitte drucken Sie dazu das Dokument "MATLABtutorial.pdf" aus und nehmen Sie es mit in die Einführungsstunde. Während der Übungsstunde werden Sie dieses Dokument am Computer durcharbeiten und können den Assistenten Fragen stellen, falls Probleme auftauchen.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 03.09.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.

- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 16:00 Uhr, ETH Zentrum, ML F 34.

- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG