Serie 2

1. *(Online-Aufgabe)*

In the lectures we have defined some subsets of a vector space that arise from linear combinations of a set of vectors, such as the span. Here we look at another important class of subsets of a vector space, namely, *convex sets*.
Take a vector space $(V, +, \cdot)$. A set $M \subset V$ is said to be *convex* if, for all $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in M$ and all $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $0 \leq \lambda \leq 1$, we have:

$$\lambda \cdot \mathbf{v} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{w} \in M \, .$$

1. Take $V = \mathbb{R}^n$. Which of the following subsets $M \subset V$ are *convex*?

(a) $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} < 1\}$,

(b) $M_{\mathbf{w}} = \{\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w} \ : \ \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n, \text{ such that } \|\tilde{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2} < 1\}$, for a fixed but arbitrary $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,

(c) $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \ : \ (v_2)^2 < 2v_1\}$,

(d) $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \ : \ (v_2)^2 \geq 2v_1\}$.

2. Take $V = \mathbb{P}_n = \left\{p(x) = \sum_{i=0}^n p_i \, x^i \ : \ x \in \mathbb{R}, \ p_i \in \mathbb{R} \text{ for all } i = 0, \ldots, n\right\}$, the vector space of polynomials of degree less or equal than n. Which of the following subsets $M \subset V$ are *convex*?

(a) $M = \{p \in \mathbb{P}_n \ : \ 1 \leq |p_i| \leq 2, \text{ for all } i = 0, 1 \ldots, n\}$,

(b) $M = \{p \in \mathbb{P}_n \ : \ |p_i| \leq 2, \text{ for all } i = 0, 1, \ldots, n\}$,

(c) $M = \{p \in \mathbb{P}_n \ : \ |p(x)| \leq 2, \text{ for all } x \in [0, 1]\}$.

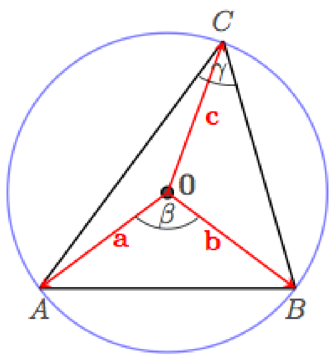
2. Consider a triangle $\triangle ABC$, as in figure 1a.

(a) Using elementary geometry, show that $2\gamma = \beta$.

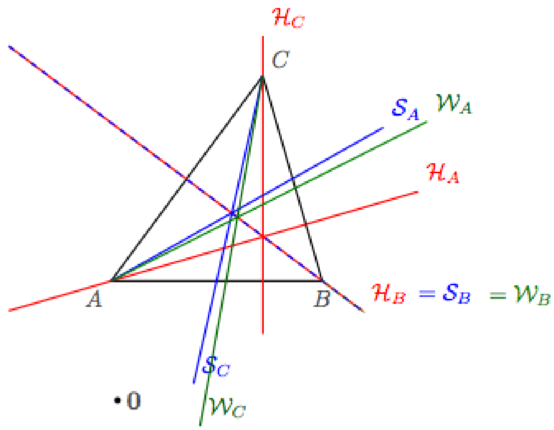
(b) Provide a proof of the same fact, $2\gamma = \beta$, but this time by using analytic geometry.
Hinweis: You might find the following trigonometric identity useful:

$$\cos(2 \cdot \alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1.$$

Bitte wenden!



(a) Skizze zu Aufgabe **2.**



(b) Skizze zu Aufgabe **3.**

Abbildung 1: Skizzen

3. Consider a triangle $\triangle ABC$, as in figure 1b.

(a) Given $A = -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, and $C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, find the line $\mathcal{G}$, which is of the form

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{q} + \tau \cdot \mathbf{w} \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}, \text{ wobei } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\},$$

for

(i) the three medians $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$,

(ii) the three altitudes $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C$,

(iii) the three angle bisectors $\mathcal{W}_A, \mathcal{W}_B, \mathcal{W}_C$.

(b) Determine the same formulas for arbitrary points $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, and $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, that is, find the equations of the following lines

(i) the three medians $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$,

(ii) the three altitudes $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C$,

(iii) the three angle bisectors $\mathcal{W}_A, \mathcal{W}_B, \mathcal{W}_C$.

4. (a) Given the point $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and the plane

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\}.$$

find the reflection point $Q' = \begin{pmatrix} Q_1' \\ Q_2' \\ Q_3' \end{pmatrix}$ of Q through $\mathcal{H}$.

Siehe nächstes Blatt!

For the following problems we fix $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ and $\beta \in \mathbb{R}$ that determine the plane

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = \beta\}.$$

(b) Reflect a point $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$ through $\mathcal{H}$. In other words, determine a general formula for the reflected point $P' = \begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix}$ of P.

(c) Given the vectors $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ reflect the line

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{q} + \tau \cdot \mathbf{w} \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}$$

through $\mathcal{H}$, that is, determine $\mathbf{q}', \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^3$ which determine the line $\mathcal{G}' = \{\mathbf{q}' + \tau \cdot \mathbf{w}' \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}$.

(i) When is $\mathcal{G}'$ equal to $\mathcal{G}$?

(ii) When is $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \emptyset$?

(d) Given two points $P, Q \in \mathbb{R}^3$, with $P \neq Q$, determine the reflection plane

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = \alpha\},$$

through which P is reflected onto Q, that is, determine $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. What conditions must P and Q satisfy so that $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$?

5. (a) Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Compute

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,

(ii) the area of the parallelogram deteremined by $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$,

(iii) the vector $\mathbf{n}_{\mathcal{H}}$ normal to the plane

$$\mathcal{H} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{c}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} .$$

(b) Which of the following identites are true for all vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$?

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,

(ii) $\mathbf{a} \times (r\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ for all $r \in \mathbb{R}$,

(iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$.

Bitte wenden!

Informationen:

- **MATLAB auf dem eigenen Computer:** Auf allen Rechnern der ETH ist MATLAB installiert. Sie können die Programmieraufgaben also problemlos auf den ETH Computern lösen. Falls Sie jedoch MATLAB auf Ihrem persönlichen Rechner installieren möchten, können Sie sich die MATLAB Software unter folgendem Link kostenlos herunterladen:

  https://ides.ethz.ch/ .

  Klicken Sie dazu auf *Katalog* und geben Sie in das Feld *Schnellsuche* den Begriff *MATLAB* ein. Bevor Sie auf den "Bestellen"-Button klicken können, müssen Sie sich mit Ihrem ETH Benutzernamen einloggen.

  Eine Installationsanleitung der Software finden Sie ebenfalls unter:

  https://stud-ides.ethz.ch/cgi-bin/copy_skeleton.fastpl?skeleton=install_software .

- **MATLAB Einführung:** Am Donnerstag, den 03.10.2012, findet während der Übungsstunde eine MATLAB Einführung in den Computerräumen HG E 26.1, HG E 26.3 und HG E 19 statt. Die Raumzuteilung lautet wie folgt nach Ihrem Assistenten:

Gruppen	Raum	AssistentIn	Zeit
1, 9, 11 / 2, 10, 12	HG E 19	Florian Zeiser & Elke Spindler & Florian Scherrer	14.15-15.00 / 15.15-16.00
7, 13 / 8, 14	HG E 26.1	Željko Kereta & Roman Hettelingh	14.15-15.00 / 15.15-16.00
3, 5 / 4, 6	HG E 26.3	Raoul Bourquin & Daniele Casati	14.15-15.00 / 15.15-16.00

  Bitte drucken Sie dazu das Dokument "MATLABtutorial.pdf" aus und nehmen Sie es mit in die Einführungsstunde. Während der Übungsstunde werden Sie dieses Dokument am Computer durcharbeiten und können den Assistenten Fragen stellen, falls Probleme auftauchen.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 03.09.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.

- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 16:00 Uhr, ETH Zentrum, ML F 34.

- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG