Serie 3

1. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein fixes $m \in \mathbb{N}$ seien die Vektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ aus V gegeben, wobei wir annehmen, dass $\mathbf{a}^j \neq \mathbf{0}$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

(a) Angenommen wir betrachten ein $\mathbf{v} \in V$, für welches die Gleichungen

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}^j \rangle = 0 \text{ für alle } j = 1, \ldots, m$$

erfüllt sind.

Zeigen Sie, dass dieser Vektor $\mathbf{v}$ orthogonal zum $\mathsf{Span}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}$ steht, d.h. dass $\mathbf{v}$ orthogonal auf allen Vektoren steht, welche als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ geschrieben werden können.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$, mit der Standard-Vektoraddition, der gewöhnlichen skalaren Multiplikation und dem Standard-Skalarprodukt gegeben. Für $m = 2$ definieren wir

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den nachfolgend definierten Vektor $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} := \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}^1 \rangle}{\langle \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^1 \rangle} \mathbf{a}^1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}^2 \rangle}{\langle \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^2 \rangle} \mathbf{a}^2 .$$

Verifizieren Sie, dass gilt $\langle \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2 \rangle = 0$ und zeigen Sie weiter, dass $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ orthogonal zu $\mathsf{Span}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ steht.

(c) Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in V$ definieren wir den Vektor $\mathbf{w}$ wie folgt:

$$\mathbf{w} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}^j \rangle}{\langle \mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j \rangle} \mathbf{a}^j. \tag{1}$$

Nehmen Sie an, dass alle Vektoren $\mathbf{a}^j$, $j = 1, \ldots, m$, paarweise orthogonal zueinander stehen, d.h. dass

$$\langle \mathbf{a}^l, \mathbf{a}^j \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad l, j \in \{1, \ldots, m\} \text{ , sodass } \quad l \neq j.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ orthogonal zum $\mathsf{Span}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}$ steht.

(d) Sei $V = \mathbb{P}_2$, die Menge aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit der gewöhnlichen Addition und skalaren Multiplikation

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) = \mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x) \quad \text{und} \quad (\alpha \mathbf{p})(x) = \alpha \mathbf{p}(x) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}_2.$$

Es sei weiter das folgende Skalarprodukt auf $\mathbb{P}_2$ gegeben:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_0^1 \mathbf{p}(x) \mathbf{q}(x) dx \quad \text{für} \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2.$$

Bitte wenden!

Wir wählen $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{v} \in \mathbb{P}_2$, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1(x) &= 1, \\ \mathbf{a}^2(x) &= 1 - 2x, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \\ \mathbf{v}(x) &= x^2, \end{aligned}$$

Zeigen Sie für diese Wahl von $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{v} \in \mathbf{P}_2$, dass $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ orthogonale Vektoren in $\mathbb{P}_2$ bilden und berechnen Sie *das Polynom* $\mathbf{w}$, indem Sie die Formel aus (1) verwenden.

2. (a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function aReflect = Problem2a(a, p, q),
```

welche als Eingabe einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ (als Spaltenvektor) und die Spaltenvektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ nimmt. Letztere bestimmen die Gerade $\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \tau\mathbf{q},\ \tau \in \mathbb{R}\}$. Die Funktion soll als Rückgabewert das Spiegelbild von $\mathbf{a}$ unter der Spiegelgeraden $\mathcal{G}$, **aReflect** $\in \mathbb{R}^2$, als Spaltenvektor zurückgeben. Zudem sollte die Funktion $\mathbf{a}$, $\mathcal{G}$ und **aReflect** plotten.

Hinweis: Eine Vorlage/Template für die MATLAB-Funktion `Problem2a` kann von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden.

(b) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion

```
function [s, t] = Problem2b(p1, q1, p2, q2),
```

welche für die Eingabe von zwei Geraden

$$\mathcal{G}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p}^1 + \tau\mathbf{q}^1,\ \tau \in \mathbb{R}\} \text{ und}$$

$$\mathcal{G}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p}^2 + \tau\mathbf{q}^2,\ \tau \in \mathbb{R}\}\,,$$

charakterisiert durch die Spaltenvektoren $\mathbf{p}^1, \mathbf{q}^1 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q}^1 \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}^2, \mathbf{q}^2 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q}^2 \neq \mathbf{0}$, zwei Spaltenvektoren $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ zurückgibt, welche die Winkelhalbierende

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \tau\mathbf{t},\ \tau \in \mathbb{R}\}$$

zwischen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ repräsentieren. Zudem sollte die Funktion `Problem2b` die Geraden $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ und die Winkelhalbierende $\mathcal{W}$ graphisch in einem Plot darstellen.

Hinweise:

- Eine Vorlage/Template für die MATLAB-Funktion `Problem2b` kann von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden.
- Wir möchten Sie darauf hinweisen, dass die Ergebnisse von Serie 2 für das Lösen dieser Aufgabe hilfreich sein könnten.

3. Wir betrachten die Gerade

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \tau\mathbf{q},\ \tau \in \mathbb{R}\}\,,$$

wobei $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ gegebene Spaltenvektoren sind und

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \right\},$$

einen vorgegebenen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ und Radius $r > 0$ darstellt. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

Siehe nächstes Blatt!

```
function intersection = Problem3(r, centre, p, q),
```

welche die Schnittpunkte von $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{C}$ berechnet.
Benutzen sie dazu eine *stabile Implementierung* zum Lösen der im Zentrum stehenden quadratischen Gleichung. Warum ist eine saubere Behandlung des Falls, bei welchem es (theoretisch) nur genau einen Schnittpunkt gibt, nicht möglich?

Hinweis: Benutzen Sie für die *stabile Implementierung* die Funktion `zerosquadpolstab` (Code 1.8.10) aus der Vorlesung. Ein Template für die MATLAB-Funktion `Problem3` können Sie von der Vorlesungshomepage herunterladen.

4. (a) Wir betrachten zwei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ (Spaltenvektoren), mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, und eine Gerade $\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \tau\mathbf{q},\ \tau \in \mathbb{R}\}$, gegeben durch die Spaltenvektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$. Gegeben sei eine Spiegelgerade $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{s}+\tau\mathbf{t}, \tau \in \mathbb{R}^2\}$, welche die Punkte $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auf die Gerade $\mathcal{G}$ spiegelt. Wann gibt es nur genau eine solche Spiegelgerade $\mathcal{A}$? Welche Bedingungen müssen von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathcal{G}$ erfüllt werden, damit es zwei solcher Spiegelgeraden $\mathcal{A}$ gibt?

(b) Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [s, t] = Problem4(a, b, p, q),
```

welche die oben beschriebene Spiegelgerade $\mathcal{A}$ berechnet, indem sie die Spaltenvektoren $\mathbf{s}$ und $\mathbf{t}$ zurückgibt, welche die Gerade $\mathbf{A}$ charakterisieren. $\mathcal{A}$ ist diejenige Gerade, an welcher die zwei gegebenen Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, wobei $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, auf die Gerade $\mathcal{G}$ (gegeben durch die Spaltenvektoren $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$) gespiegelt werden.
Plotten Sie die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, die Gerade $\mathcal{G}$, die Spiegelgerade $\mathcal{A}$ und die Spiegelbilder von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
Falls $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bereits auf $\mathcal{G}$ liegen, sollte die Funktion folgende Ausgabe zurückgeben:

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} \text{ und } \mathbf{t} = \mathbf{q}\,.$$

Hinweise:

- Diese Aufgabe ist eine Weiterführung der Aufgabe **2**.(b).
- Falls der Vektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ nicht parallel zu $\mathcal{G}$ steht, dann gibt es immer zwei Spiegelgeraden $\mathcal{A}^1$ und $\mathcal{A}^2$. Trotzdem reicht es, nur eine der beiden zu plotten.
- Falls der Vektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ andererseits parallel zu $\mathcal{G}$ steht und $\mathbf{a}, \mathbf{b} \notin \mathcal{G}$, gibt es nur genau eine Spiegelgerade $\mathcal{A}$.
- Ein Template der MATLAB-Funktion `Problem4` kann von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden.

5. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [s, t]= Problem5(a1, a2, a3, p, q),
```

welche für drei von einander verschiedene Punkte $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3 \in \mathbb{R}^2$ (gegeben als Spaltenvektoren) und eine Gerade

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \tau\mathbf{q},\ \tau \in \mathbb{R}\}\,,$$

gegeben durch die Spaltenvektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, die Spiegelgerade

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \tau\mathbf{t}, \tau \in \mathbb{R}\},$$

Bitte wenden!

– falls existent – berechnet, welche den Punkt $\mathbf{a}^1$ auf sich selbst und den Schwerpunkt $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ des Dreiecks $\triangle(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ auf $\mathcal{G}$ spiegelt. Falls eine solche Spiegelgerade $\mathcal{A}$ nicht existiert, soll die MATLAB-Funktion als Ausgabe $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ zurückgeben.

Hinweise:

- Versuchen Sie eine Zeichnung der Problemstellung auf Papier anzufertigen. Beachten Sie dabei, dass die Lösung nur existiert, sofern

$$\|\mathbf{a}^1 - \mathbf{c}\| \leq \mathsf{dist}\left(\mathbf{a}^1, \mathcal{G}\right) ,$$

  wobei $\mathbf{c}$ den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ bezeichnet.
- Wie hängt diese Aufgabe mit der Problemstellung in Aufgabe 3 zusammen?
- Eine Vorlage für die MATLAB-Funktion `Problem5` kann von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 10.09.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterpräsenz:** Aufgrund der grossen Nachfrage haben wir die Präsenz auf zwei Stunden ausgedehnt. Sie findet nun in einem besser geeigneten Raum statt am
  Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG