Serie 4

1. *(Online-Aufgabe)*

Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie jeweils die zutreffende Aussage an.

1. AB ist

(a) nicht definiert.

(b) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

(c) $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

2. BA ist

(a) nicht definiert.

(b) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

(c) $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{BB}$ ist

(a) nicht definiert.

(b) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

(c) $= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{AA}$ ist

(a) nicht definiert.

(b) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{B}^\top\mathbf{B}$ ist

(a) nicht definiert.

(b) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

(c) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{BB}^\top$ ist

(a) nicht definiert.

(b) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

(c) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ordnen Sie die Ausdrücke in den folgenden Aufgaben den richtigen Ergebnissen aus nachstehender Auswahl (a)-(h) zu. Ersparen Sie sich Rechenarbeit, indem Sie auf frühere Berechnungen zurückgreifen.

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

(g) nicht definiert,

(h) keine der angegebenen Matrizen.

7. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{BC}$ an.

8. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top$ an.

9. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{CB}$ an.

10. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{BD}$ an.

11. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{B}^\top \mathbf{D}^\top$ an.

12. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{B}(\mathbf{C} + \mathbf{D})$ an.

13. Geben Sie das richtige Ergebnis für $(\mathbf{AB})(\mathbf{C} + \mathbf{D})$ an.

14. Geben Sie das richtige Ergebnis für $\mathbf{A}(\mathbf{BC} + \mathbf{BD})$ an.

2. Wir betrachten die Klasse aller quadratischen oberen Dreiecksmatrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für jene Klasse von Matrizen sind die Einträge unterhalb der Hauptdiagonale gleich 0. Das bedeutet, dass sie von folgender Form sind:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}, \text{wobei } a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\,.$$

Beweisen Sie, dass das Produkt zweier quadratischer oberer Dreiecksmatrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ wieder eine quadratische obere Dreiecksmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ergibt, d.h. zeigen Sie dass falls gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{a_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}, \text{wobei } a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j,\\ \mathbf{B} &= \{b_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}, \text{wobei } b_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\end{aligned}$$

für $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$, wobei wir $\mathbf{C}$ auch schreiben als $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, gilt:

$$c_{ij} = 0 \text{ für } i > j\,.$$

3. (a) Gegeben sei die unten abgedruckte MATLAB-Funktion

`function w = transform(v)` ,

welche einen Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ als Eingabe nimmt und einen transformierten Spaltenvektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ zurückgibt.
Welche Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ repräsentiert die MATLAB-Funktion `function w = transform(v)`, sprich für welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}\,.$$

```
function w = transform(v)
% Eingabe der Funktion: Spaltenvektor v der Laenge n
% Rueckgabe der Funktion: Transformierter Spaltenvektor w der Laenge n
    n = length(v);
    w = v(n:-1:1);
    w(n) = w(n) + dot(v,ones(n,1));
    w = w + v(1)*ones(n,1);
end
```

(b) Wir wissen, dass die nicht zugängliche MATLAB-Funktion

`function w = topsecret(v)`

einen Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ als Eingabe nimmt und darauf einen Spaltenvektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ zurückgibt. Weiter wissen wir, dass sich die MATLAB-Funktion durch eine Matrixmultiplikation realisieren lässt, d.h. es gibt ein $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, sodass

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Beschreiben Sie eine Strategie, mit der Sie diese Matrix $\mathbf{A}$ zu finden gedenken.

Hinweise: Testen Sie Ihre Strategie als erstes mit der MATLAB-Funktion `function w = transform(v)`, von welcher Sie aus **(a)** wissen, wie die Matrix $\mathbf{A}$ aussieht. Als weitere Hilfestellung ist die “verschlüsselte MATLAB-Funktion” `function w = topsecret(v)` gegeben (`topsecret.p`), mit welcher Sie Ihre Strategie testen sollen. Sie finden die Funktion auf der Vorlesungshomepage. Geben Sie die Matrizen für $n = 3$ und $n = 4$ an.

Siehe nächstes Blatt!

4. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit den Einträgen

$$a_ij = \begin{cases} i, & \text{falls } i \le j \\ j, & \text{falls } j < i \end{cases} .$$

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

`function A = buildminij(n)`,

welche für die Eingabe einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $\mathbf{A}$ zurückgibt.

(b)* Für Genies: Implementierung derselben MATLAB-Funktion

`function A = buildminij_genius(n)`,

derselben Funktion wie in **(a)**, aber ohne Verwendung von `for`-Schleifen und `if`-Abfragen mit Hilfe der MATLAB-Funktionen `tril`, `triu` und `diag`.

5. Gegeben seien zwei Spaltenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die beiden MATLAB-Funktionen

`function w = abmult1(a,b,v)` und `function w = abmult2(a,b,v)`,

welche für einen Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ einen Spaltenvektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ zurückgeben. Die genauen MATLAB-Funktionen sind nachfolgend gegeben.

```
function w = abmult1(a,b,v)
% Eingabe der Funktion: Spaltenvektoren a, b, v der Laenge n
% Rueckgabe der Funktion: Transformierter Spaltenvektor w der Laenge n
    n = length(v);
    w = (a * b') * v;
end
```

```
function w = abmult2(a,b,v)
% Eingabe der Funktion: Spaltenvektoren a, b, v der Laenge n
% Rueckgabe der Funktion: Transformierter Spaltenvektor w der Laenge n
    n = length(v);
    w = a * (b' * v);
end
```

(a) Beide MATLAB-Funktionen realisieren die Multiplikation mit der gleichen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, d.h. geben den Spaltenvektor $\mathbf{w} = \mathbf{Av}$ zurück. Geben Sie die Matrix $\mathbf{A}$ an.

(b) Erzeugen Sie Laufzeitplots für die beiden Funktionen mit Hilfe des Templates

`rankonemulttiming.m`,

welches Sie von der Vorlesungshomepage herunterladen können.

(c) Geben Sie den (asymptotischen) Rechenaufwand für die beiden MATLAB-Funktionen für grosse $n \in \mathbb{N}$ an.

Informationen:

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 17.10.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.

Bitte wenden!

- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG