Serie 5

Notation: Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ sind die Potenzen $\mathbf{A}^k$ definiert durch das k-fache Matrixprodukt:

$$\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ Faktoren}} .$$

1. *(Online-Aufgabe)* Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben für ein $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind. Versuchen Sie für die falschen Aussagen Gegenbeispiele zu finden. Geben Sie diese an.

1. Wenn die Spalten 1 und 3 von $\mathbf{B}$ identisch sind, so stimmen auch die Spalten 1 und 3 von $\mathbf{AB}$ überein.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Falls die Zeilen 1 und 3 von $\mathbf{B}$ übereinstimmen, so sind auch die Zeilen 1 und 3 von $\mathbf{AB}$ identisch.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Falls die Zeilen 1 und 3 von $\mathbf{A}$ übereinstimmen, dann stimmen auch die Zeilen 1 und 3 von $\mathbf{AB}$ überein.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

4. $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p,q}$ für $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ gegeben. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind.

5. Falls $\mathbf{A}^2$ definiert ist, so ist $\mathbf{A}$ zwangsläufig eine quadratische Matrix.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Falls die Produkte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ beide definiert sind, so sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ quadratische Matrizen.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

7. Falls $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ definiert sind, müssen $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{AB}$ quadratische Matrizen sein.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Falls $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$, dann gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, wobei $\mathbf{I}$ die zugehörige Identitätsmatrix bezeichnet.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

2. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Addieren Sie $\mathbf{AB}$ zu $\mathbf{AC}$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$. Was stellen Sie fest?

b) Multiplizieren sie $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{BC}$. Multiplizieren Sie auch $\mathbf{AB}$ mit $\mathbf{C}$. Was stellen Sie beim Vergleichen der beiden Resultate fest?

3. (i) Wir betrachten die folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{asnd} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ und $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

b) Warum stimmen die beiden Ergebnisse aus **a)** nicht überein?

c) Finden Sie zwei 2×2 Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$, sodass

$$(\mathbf{C}+\mathbf{D})(\mathbf{C}-\mathbf{D}) = \mathbf{C}^2 - \mathbf{D}^2.$$

(ii) Wir betrachten die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ nicht mit $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ übereinstimmt. Schreiben Sie die allgemein gültige Rechenregel auf für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n,n}, n \in \mathbb{N}$:
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \underline{\qquad} + \mathbf{B}^2$.

4. Betrachten Sie die Matrizen (Vektoren sind $n \times 1$-Matrizen!)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Matrixprodukte, sofern sie definiert sind. Falls die Produkte nicht definiert sind, geben Sie eine Begründung an, weshalb sie nicht definiert sind.

$$\mathbf{AB}, \; \mathbf{BA}, \; \mathbf{Ax}, \; \mathbf{A}^2, \; \mathbf{B}^2, \; \mathbf{yx}, \; \mathbf{y}^\top\mathbf{x}, \; \mathbf{xy}^\top, \; \mathbf{B}^\top\mathbf{y}, \; \mathbf{y}^\top\mathbf{B}.$$

5. Betrachten Sie eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ und die $n \times n$ Identitätsmatrix $\mathbf{I}_n$. Wir definieren die Matrix $\mathbf{A}_1$ durch $\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} - \mathbf{I}_n$. $\mathbf{A}^k$ kann somit wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_1)^k = \mathbf{I}_n + \binom{k}{1}\mathbf{A}_1 + \binom{k}{2}\mathbf{A}_1^2 + \ldots + \binom{k}{k}\mathbf{A}_1^k. \tag{1}$$

Betrachten Sie nun den Spezialfall

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt $\mathbf{A}_1^k = \mathbf{0}$ für $k \geq 3$.

b) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{10}$, indem Sie Formel (1) verwenden.

6. (i) Erstellen Sie in jeder der folgenden Aufgaben eine MATLAB-Funktion, welche für eine gegebene natürliche Zahl `n` die jeweilige *dünnbesetzte Matrix* resp. *sparse Matrix* erstellt.

a) Erstellt eine $n \times n$ dünnbesetzte Matrix, deren nicht-null Einträge die Form des Buchstabens Z bilden, wobei die Einträge wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= 1, \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ a_{j,n+1-j} &= j, \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ a_{n,j} &= n, \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Alle anderen Einträge der Matrix sind gleich 0.

```
function Z = ZShaped( n )
```

b) Erstellt eine $n \times n$ dünnbesetzte Matrix, deren nicht-null Einträge die Form des Buchstabens X bilden, wobei die Einträge wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} a_{jj} &= 2, \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ a_{j,n+1-j} &= 2, \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Alle anderen Einträge der Matrix sind gleich 0.

```
function X = XShaped( n )
```

c) Erstellt eine $n \times n$ dünnbesetzte Dreibandmatrix, mit den folgenden Einträgen

$$\begin{aligned} a_{jj} &= 1, \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ a_{j+1,j} &= 2, \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1 \\ a_{j+2,j} &= 3, \quad \text{für } j = 1, \dots, n-2 \end{aligned}$$

Alle anderen Einträge der Matrix sind gleich 0.

```
function T = ThreeBand( n )
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Z-förmige Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) X-förmige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Dreibandmatrix

Abbildung 1: Beispiele für die Matrizen aus Aufgabe 6.(i).a)-c), wobei `n=5`

Hinweis: Benutzen Sie das MATLAB-Format `sparse`, um die Matrizen zu erstellen. Für mehr Informationen benutzen Sie die MATLAB-Hilfe (`help sparse` oder `doc sparse`).

(ii) Betrachten Sie die drei dünnbesetzten Matrizen genauer, welche im Teil (i) der Aufgabe eingeführt wurden. Untersuchen Sie, welche dieser Matrizen durch Multiplikation mit sich selbst wieder eine dünnbesetzte Matrix ergibt.

Siehe nächstes Blatt!

(iii) Implementieren Sie für jede der drei Matrizen aus (i) eine MATLAB-Funktion, welche das Matrix-Vektorprodukt der jeweiligen Matrix mit einem Spaltenvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ als Eingabe berechnet. Beachten Sie dabei, dass wir das Matrix-Vektorprodukt realisieren möchten, *ohne dass die Matrix selbst aufgestellt wird.* Als Ausgabe der MATLAB-Funktion soll der Spaltenvektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zurückgegeben werden. Zu schreiben sind somit die folgenden MATLAB-Funktionen:

```
function xz = MultiplyZShaped(x),
function xx = MultiplyXShaped(x)
```

und

```
function xt = MultiplyTridiagonal(x).
```

Informationen:

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 24.10.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG