Serie 7

1. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 7\\1\le j\le 4}}$ ist eine (7×4)-Matrix. Betrachten Sie durch $\mathbf{A}$ gegebene lin. Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & a_{14}x_4 & = & 0\,, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & a_{24}x_4 & = & 0\,, \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & a_{34}x_4 & = & 0\,, \\
a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & a_{43}x_3 & + & a_{44}x_4 & = & 1\,, \\
a_{51}x_1 & + & a_{52}x_2 & + & a_{53}x_3 & + & a_{54}x_4 & = & 0\,, \\
a_{61}x_1 & + & a_{62}x_2 & + & a_{63}x_3 & + & a_{64}x_4 & = & 0\,, \\
a_{71}x_1 & + & a_{72}x_2 & + & a_{73}x_3 & + & a_{74}x_4 & = & 0\,.
\end{array}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig sind.

(a) Die Lösungsmenge ist eine (eventuell leere) Teilmenge des $\mathbb{R}^7$.

(b) Die Lösungsmenge ist eine (eventuell leere) Teilmenge des $\mathbb{R}^4$.

(c) Ein derartiges System kann unendlich viele Lösungen haben.

(d) Ein derartiges System kann genau eine Lösung haben.

(e) Es gibt jedenfalls die triviale Lösung $x = 0$.

(f) Die Lösungsmenge ist ein (eventuell nulldimensionaler) Unterraum.

(g) Es gibt genau dann eine Lösung, wenn die rechte Seite im Spaltenraum von A liegt.

(h) Wenn die augmentierte Matrix den Rang 5 hat, so gibt es eine Lösung.

(i) Die Menge der Differenzen von zwei Lösungen ist (leer oder) ein Vektorraum.

(j) Das arithmetische Mittel von zwei Lösungen ist wieder eine Lösung.

(k) Werden die letzten drei Gleichungen gestrichen, so besitzt das Restsystem jedenfalls eine Lösung.

(l) Werden die letzten vier Gleichungen gestrichen, so besitzt das Restsystem nichttriviale Lösungen.

Bitte wenden!

2. Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Wir definieren die $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ durch

$$\mathbf{A} := \mathbf{u}\mathbf{v}^\top .$$

Folgende Fragen und Aufgabenstellungen sind in einem konkreten Fall (a) und dann im allgemeinen Fall (b) zu bearbeiten:

(i) Welche Vektoren spannen den Zeilenraum von $\mathbf{A}$ auf?

(ii) Welche Vektoren spannen den Spaltenraum von $\mathbf{A}$ auf?

(iii) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von $\mathbf{A}$.

(iv) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

(v) Beschreiben Sie $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ durch eine Hyperebenengleichung $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ mit geeignetem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(vi) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Bestimmen Sie die obigen Punkte (i)-(vi) für

(a) das konkrete Zahlenbeispiel $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

(b) für allgemeine Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

3. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, für $n, m \in \mathbb{N}$. Wir fügen eine zusätzliche Spalte $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zu $\mathbf{A}$ hinzu, d.h. wir betrachten $\mathbf{B} = [\mathbf{A}\,\mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{n,m+1}$.

(a) Geben Sie ein Beispiel für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4,3}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ an, für welches das Bild von $\mathbf{A}$ dem Bild von $\mathbf{B}$ entspricht.

(b) Geben Sie ein Beispiel für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4,3}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ an, für welches das Bild von $\mathbf{B} = [\mathbf{A}\,\mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{4,4}$ grösser als das Bild von $\mathbf{A}$ ist.

(c) Geben Sie an, unter welchen allgemeinen Bedingungen das Bild von $\mathbf{B}$ echt grösser ist, als das Bild von $\mathbf{A}$. Was bedeutet das für die Spalten von $\mathbf{A}$ und den Vektor $\mathbf{b}$?

4. Sei eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Weiter betrachten wir die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{v}_k\}$ ist linear unabhängig.

  (ii) Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ ist linear unabhängig.

(b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{B}) .$$

5. Es seien zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt

(a) $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \subset \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Siehe nächstes Blatt!

(b) $\text{Rang}(\mathbf{AB}) \leq \text{Rang}(\mathbf{A})$.

(c) $\text{Rang}(\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top) \leq \text{Rang}(\mathbf{A}^\top)$.

Im Weiteren nehmen wir an, dass

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n \;(\hat{=}\, n \times n\text{-Einheitsmatrix}). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

(d) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n$.

Hinweis: Sie können die vorangehenden Aussagen verwenden, um die nachfolgenden Aussagen zu zeigen!
Bemerkung: In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass für zwei $n \times n$-Matrizen aus der Bedingung (1) folgt, dass gilt $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n$. Diese Bedingung (d) bedeutet, dass $\mathbf{A}$ invertierbar ist. Somit folgt aus Bedingung (1) nicht nur, dass $\mathbf{B}$ die rechtsseitige Inverse von $\mathbf{A}$ ist, sondern es gilt sofort

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n \,,$$

d.h. $\mathbf{B}$ ist (beidseitige) Inverse von $\mathbf{A}$.

6. Wir betrachten den Matrixraum $\mathcal{M}$ aller reellen $n \times n$-Matrizen $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{n,n}$. Analog zum $\mathbb{R}^n$ wird dieser mit komponentenweise Addition

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{mit} \quad c_{ik} := a_{ij} + b_{ij} \;, \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \;,$$

und komponentenweise definierter Skalarmultiplikation

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad c_{ij} := \alpha a_{ij} \;, \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \;,$$

zum Vektorraum.

Weiter betrachten wir die folgenden Untermengen von $\mathcal{M}$:

(a) Die Menge aller Diagonalmatrizen

$$\mathcal{D} := \left\{\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n,n} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j\right\},$$

(b) Die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen

$$\mathcal{R} := \left\{\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n,n} \;:\; a_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j\right\},$$

(c) Die Menge aller symmetrischen Matrizen

$$\mathcal{S} := \left\{\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n,n} \;:\; a_{ij} = a_{ji} \text{ für alle } 1 \leq i,j \leq n\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathcal{D}, \mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ Unterräume des Matrixraumes $\mathcal{M}$ sind und beschreiben sie jeweils eine Basis. Bestimmen Sie ausserdem die jeweilige Dimension der Unterräume.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 14.11.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.

Bitte wenden!

- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13. Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG