Serie 8

Für die MATLAB -Aufgaben dieser Serie finden Sie zugehörige Templates im komprimierten Ordner *MatlabTemplates08* auf der Vorlesungshomepage. Weiter enthält der Ordner Beispiele für Ein- und Ausgaben der MATLAB -Funktionen, welche Sie zum Testen Ihrer MATLAB -Programme verwenden können.

1. Gegeben sei eine natürliche Zahl n. Anhand von n Messungen der skalaren Grösse x haben wir n (leicht verschiedene) Messwerte m_1, m_2,...,m_n für x erhalten aus denen wir durch Lösen eines überbestimmten linearen Gleichungssystems im Sinne der kleinsten Quadrater eine Schätzung für x erhalten wollen.

a) Repetieren Sie den Abschnitt 3.9 der Vorlesung über die Kleinste-Quadrate-Lösung von überbestimmten linearen Gleichungssystemen.

b) Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem für das vorliegende Problem auf.

c) Stellen Sie die zugehörigen *Normalengleichugen* gemäss Satz 3.9.2.A der Vorlesung auf.

d) Bestimmen Sie die *Kleinste-Quadrate=Lösung* gemäss Definition 3.9.2.C und interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Diese Aufgabe ist eine versteckte lineare Regression wie in dem Beispiel aus Abschnitt 3.9.2 der Vorlesung. Auf den ersten Blick scheint die Aufgabenstellung nicht auf ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem zu führen, doch dann kommt die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zu Hilfe!

Wir betrachten die Funktion $f(t) = \alpha e^{\beta \cdot t}$ mit unbekannten Parametern $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$. Gegeben sind Messwerte (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Wir wollen nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart bestimmen, dass $f(t)$ die Bedingungen

$$f(t_i) = y_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\ , \tag{1}$$

"bestmöglichst" (im Sinne der kleinsten Quadrate) erfüllt.

a) Welches überbestimmte *nichtlineare* Gleichungssystem ergibt sich zunächst aus (1)?

b) In welches überbestimmte lineare Gleichungssystem lässt es sich transformieren?

Hinweis: Verwenden Sie die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

c) Stellen Sie die Normalengleichungen gemäss Satz 3.9.2.A aus der Vorlesung zu dem überbestimmten lineare Gleichungssystem aus der vorhergehenden Teilaufgabe auf.

d) Implementieren Sie eine MATLAB -Funktion

```
function [alpha,beta] = ExpoFuncFit(t,y)
```

Bitte wenden!

die in den gleichlangen Spaltenvektoren `t` und `y` die Daten (t_i, y_i) entgegennimmt und eine Kleinste-Quadrate-Schätzung von α und β zurückgibt.

Hinweis. Sie können mit dem Code 3.9.1 `linearregression.m` aus der Vorlesung beginnen und ihn geeignet modifizieren.

3. Auch in dieser Aufgabe geht es wieder um die Bestimmung von Parametern aus Messwerten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus Abschnitt 3.9 der Vorlesung. Die Parameter sind hier nicht unmittelbar in der Aufgabenstellung bezeichnet.

Sei die Funktion $f(x)$ gegeben als *Linearkombination* der Funktionen

$$g_1(x) = 2^x \quad \text{und} \quad g_2(x) = 2^{-x}.$$

Anhand von Messungen wurde festgestellt, dass der Graph von $f(x)$, gegeben durch

$$Graph(f) := \{(x, f(x)) \, : \, x \in \mathbb{R}\},$$

durch folgende Punkte der (x, y)-Ebene verläuft:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-8	-4	-2	4	12

a) Auf welches überbestimmte lineare Gleichungssystem führt die Schätzung von f?

b) Was sind die zugehörigen Normalengleichungen gemäss Satz 3.9.2.A der Vorlesung?

c) Verwenden Sie die Kleinste-Quadrate-Methode um $f(x)$ aus den Massdaten zu bestimmen.

4. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einer Anwendung der *Kleinste-Quadrate-Lösung* eines überbestimmten linearen Gleichungssystems (Abschnitt 3.9 der Vorlesung, Definition 3.9.2.C) auf ein Schätzproblem aus dem Vermessungswesen.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Für n gegebene Punkte auf einer geraden Strasse mit Positionen $p_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ sind folgende Abstände (möglicherweise ungenau) vermessen worden:

$$p_i - p_j = d_{ij}, \quad \text{for } 1 \leq j < i \leq n,$$

siehe Abbildung 1

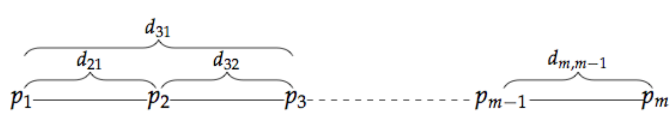

Abbildung 1: Lage der Messpunkte und Definition der Abstände d_{ij} für Aufgabe 2

Das Problem (P) besteht darin, die Positionen $p_0, \ldots, p_n$ der Messpunkte aus den gegebenen Abstandsdaten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen

a) Wie viele Gleichungen bzw. Werte für d_{ij} sind gegeben?

b) Geben Sie die in Teilaufgabe **(a)** beschriebenen Gleichungen an, d.h. formulieren Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit einer geeigneten Matrix $\mathbf{A}$ und Rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b}$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Bestimmen Sie Kern($\mathbf{A}$). Interpretieren Sie das Ergebnis und beschreiben Sie die Konsequenzen für eine Kleinste-Quadrate-Lösung (siehe Satz 3.9.2.E). Schlagen Sie eine Modifikation des Problems (P) vor, die eine eindeutige Kleinste-Quadrate-Lösung der modifizierten Problemstellung garantiert und geben Sie das zugehörige überbestimmte lineare Gleichungssystem an.

d) Stellen Sie die Normalengleichungen für den Fall $n = 5$ und das modifizierte überbestimmte lineare Gleichungssystem aus der vorherigen Teilaufgabe die *Normalengleichungen* auf.

e) Erstellen Sie eine MATLAB -Funktion

```
function p = RoadLengths(D),
```

welche als Eingabe die Messwerte d_{ij} erwartet (gespeichert in der $n \times n$ oberen Dreiecksmatrix `D`) und daraus die Lösung des modifizierten Problems aus Teilaufgabe **(c)** im Sinne der kleinsten Quadrate berechnet.

Hinweis: Man muss sich eine klares Nummerierungsschema für die Zeilen der Koeffizientenmatrix des überbestimmten linearen Gleichungssystems überlegen.

5. In dieser Aufgabe geht es um eine Umformulierung der *Normalengleichungen* (3.9.2.B) zu einem überbestimmten linearen Gleichungssystem.

Für n, $m \in \mathbb{R}$ betrachten wir eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit $n > m$ und $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$. Weiter sei ein Rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ löst die Normalengleichungen $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ *genau dann*, wenn es einen Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ so gibt, dass

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) In welcher Beziehung steht der Vektor $\mathbf{r}$ aus (2) zur Kleinste-Quadrate-Lösung $\mathbf{x}$? Wie bezeichnet man demnach einen solchen Vektor $\mathbf{r}$. Schlagen Sie dazu in Abschnitt 3.9.3 der Vorlesung nach.

c) Welchen Vorteil kann es haben, das Gleichungssystem (2) anstelle der eigentlichen Normalengleichungen $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ zu lösen. Überlegen Sie sich, wie dort die Normalengleichungen aussehen.

Hinweis: Denken Sie an das Problem aus Aufgabe 4 (Teilaufgaben **(d)** und **(e)**) für eine sehr grosse Anzahl von Messpunkten.

6. Die Methode der kleinsten Quadrate spielt auch eine grosse Rolle in der modernen Signalverarbeitung, zum Beispiel wenn es um das Ausmessen von Übertragungskanälen geht.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Signal, welches gegeben ist durch die Folge von Werten $x_1, \dots, x_m$. Diese Signale werden durch einen Übertragungkanal (in Abbildung 2 bezeichnet mit "Channel") geschickt, wobei vorher und nachher "Funktstille" herrscht.

$$0, 0, x_m, \dots, x_1, 0, 0 \longrightarrow \boxed{\text{Channel}} \longrightarrow y_m, \dots, y_1$$

Abbildung 2: Übertragungskanal und Signale

Bitte wenden!

Leider ist der Kanal nicht perfekt, so dass sich zeitlich benachbarte Signalwerte gegenseitig beeinflussen, ein Phänomen, das man als Übersprechen bezeichnet. Daher besteht das am anderen Ende des Kanals empfangene Signal aus einer anderen Folge von Werten $y_1, \ldots, y_m$, siehe Abb. 2.

Der Zusammenhang zwischen dem empfangenen und gesendeten Signal ist näherungsweise gegeben durch

$$y_i = \beta x_{i-1} + \alpha x_i + \beta x_{i+1}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{3}$$

wobei wir annehmen, dass gilt $x_0 = x_{m+1} = 0$.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Übersprechparameter α und β aus den *gemessenen* Signalen zu ermitteln und zwar durch Lösen eines überbestimmten linearen Gleichungssystems mit der Methode der kleinsten Quadrate aus Abschnitt 3.9 der Vorlesung.

a) Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem für das Schätzproblem auf.

b) Für welche Signale können wir keine eindeutige Kleinste-Quadrate-Lösung erwarten.

Hinweis: Satz 3.9.2.E der Vorlesung.

c) Schreiben Sie eine MATLAB -Funktion

```
function [beta, alpha] = CrosstalkChannel(x, y),
```

welche für die Eingabedaten $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_m$, repräsentiert durch die Spaltenvektoren `x` und `y`, die Werte für α und β aus (3) im Sinne der kleinsten Quadrate bestimmt.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 21.11.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13. Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG