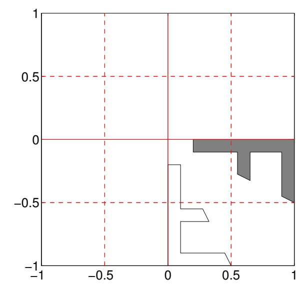
Serie 9

Die Aufgaben **1.** bis **6.** behandeln *lineare Abbildungen* und deren *Matrixdarstellungen* bezüglich geeigneter Basen. Die Theorie dazu wurde in den Abschnitten 4.1 und 4.2 der Vorlesung behandelt.

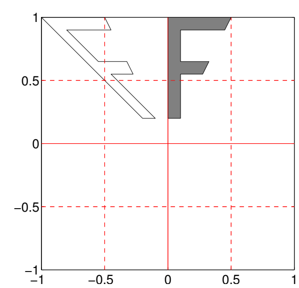
1. Durch Abbildungen in Abschnitt 4.1 der Vorlesung wurde die Wirkung von linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in der Ebene veranschaulicht. In dieser Aufgabe geht es nun darum, aus der Veranschaulichung von linearen Abbildungen diese selbst abzulesen.

a) Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte F in das weisse F überführt.



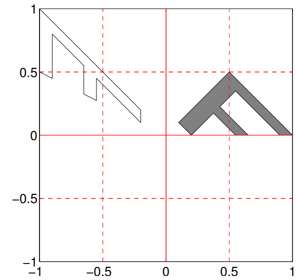
○ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte F in das weisse F überführt.



○ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) Geben Sie an, welche der untenstehenden Matrizen das gefärbte F in das weisse F überführt.



○ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2. In dieser Aufgabe geht es wieder um die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung und ferner um die in Satz 4.1.C der Vorlesung eingeführten, mit einer linearen Abbildung assoziierten Unterräume.

Für die folgenden Teilaufgaben betrachten die lineare Abbildung

$$\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

welche die Kartesischen Basisvektoren (Einheitsvektoren) $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3 \in \mathbb{R}^3$ auf die drei Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3 \in \mathbb{R}^2$ abbildet. $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3 \in \mathbb{R}^2$ sind spezifiziert in der obenstehenden Abbildung 1 gegeben. Es gilt also

$$\mathsf{F}\mathbf{e}^i = \mathbf{a}^i, \quad i \in \{1,\, 2,\, 3\}\,.$$

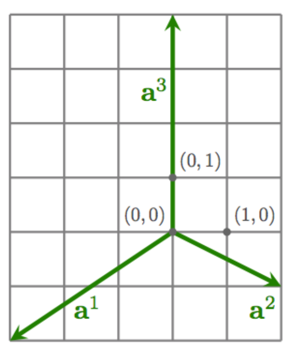


Abbildung 1: $\mathbf{a}^i = F\,\mathbf{e}^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$

(a) Welche der folgenden Matrizen $\mathbf{A}$ repräsentiert die Abbildung F (bezüglich der Kartesischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$)?

○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) Für die Abbildung F gilt $\mathrm{Bild}(\mathsf{F}) = \mathbb{R}^2$.

○ Richtig. ○ Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

(c) Für die Abbildung F gilt $\mathrm{Kern}(\mathsf{F}) = \{\mathbf{0}\}$.

○ Richtig. ○ Falsch.

(d) Die Abbildung F ist umkehrbar.

○ Richtig. ○ Falsch.

3. Nochmals üben wir das Konzept der linearen Abbildung aus Abschnitt 4.1 der Vorlesung und ihrer Matrixdarstellung an einem einfachen Beispiel.

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgende Selbstabbildung F von $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overset{\mathsf{F}}{\mapsto} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} .$$

(a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch, das heisst, beschreiben Sie wie sie auf Punkte in der Ebene wirkt.

(b) Zeigen Sie: F ist eine lineare Abbildung.

Hinweis: Dazu müssen Sie nur “mechanisch” die Eingenschaften (L1) und (L2) aus Definition 4.1.A. verifizieren.

(c) Durch welche Matrix $\mathbf{A}$ wird F bezüglich der Kartesischen Basis aus Einheitsvektoren beschrieben?

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definitionsgleichung 4.2.C. für die einer linearen Abbildung zugeordneten Matrix.

4. In Abschnitt 4.2 der Vorlesung wurde die Matrixdarstellung der Ableitung im Vektorraum der Polynome diskutiert. In dieser Aufgabe wird eine andere lineare Abbildung im Polynomraum und ihre Matrixdarstellung betrachtet.

Sei $\mathbb{P}_d$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens d, der die Dimension $n := d+1$ hat. Die Polynome 1, x, x^2, $\ldots$, x^d bilden eine Basis von $\mathbb{P}_d$, die sogenannte Monombasis, die im folgenden immer verwendet werden soll.

Gegeben sei die Abbildung

$$\mathsf{F}\ :\ \mathbf{p}(x) \in \mathbb{P}_d \ \mapsto\ \mathbf{q}(x) = (x-1)\mathbf{p}'(x) \in \mathbb{P}_d(x)\,,$$

die jedem Polynom $\mathbf{p}(x)$ das Polynom $\mathbf{q}(x) = (x-1)\mathbf{p}'(x)$ zuordnet, wobei $\mathbf{p}'(x)$ die Ableitung von $\mathbf{p}(x)$ nach x repräsentiert.

(a) Studieren Sie nochmals die Matrixdarstellung der Ableitung im Polynomraum, demonstriert im Beispiel in der Vorlesung.

(b) Zeigen Sie, dass F eine lineare Selbstabbildung von $\mathbb{P}_d$ ist.

Hinweis: Dazu müssen Sie nur die Eingenschaften (L1) und (L2) aus Definition 4.1.A. verifizieren.

(c) Bestimmen Sie die $n \times n$-Matrix, welche F bezüglich der Monombasis beschreibt.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass man dazu zuerst die Bilder der Basisvektoren unter F bestimmen muss und dann deren Koordinaten. Das liefert die Spalten der Darstellungsmatrix.

5. In dieser Aufgabe geht es darum, die lineare Abbildung, die sich hinter einer rekursiv definierten Folge versteckt, zu finden und Ihre Matrixdarastellung anzugeben.

Die Fibonacci-Folge $(F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, \ldots) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ ist wie folgt definiert:

$$F_0 := 0,\, F_1 := 1\,, \quad F_{n+1} := F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Setzen Sie $\mathbf{x}^n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ für $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) Es gibt eine lineare Abbildung H, welche $\mathbf{x}^n$ nach $\mathbf{x}^{n+1}$ überführt

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathsf{H}\left(\mathbf{x}^n\right), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie die Abbildung H explizit an.

(b) Welches ist die Matrixdarstellung $\mathbf{A}$ von $\mathsf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Kartesischen Basis aus Einheitsvektoren?

6. Alle linearen Abbildungen gemäss Definition 4.1.A der Vorlesung bilden ... immer auf ... ab, wie man leicht aus der Eigenschaft (L1) sieht. Damit können Sie folgende Frage leicht beantworten:

Gibt es eine lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2$, die ein gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in ein nichtentartetes rechtwinkliges Dreieck mit Eckpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet?

Hier kommen zwei Aufgaben zum *Basiswechsel*, welcher in den Abschnitten 4.3 resp. 4.4 der Vorlesung behandelt wurde.

7. In dieser Aufgabe geht es um die Umrechnung der Matrixdarstellung einer linearen Selbstabbildung, wie besprochen in Abschnitt 4.4 der Vorlesung.

Wir betrachten die lineare Selbstabbildung $\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

repräsentiert ist durch die Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ziel der Aufgabe ist es, die Darstellungsmatrix $\widetilde{\mathbf{D}}$ der Abbildung F bezüglich der kartesischen Basis

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

zu berechnen.

(a) Repetieren Sie die Überlegungen aus Abschnitt 4.4 der Vorlesung.

Siehe nächstes Blatt!

(b) Geben Sie die Matrix $\mathbf{S}$ an, welche den *Basiswechsel von* $\mathbb{R}^3$ (als Definitionsraum/Urbildraum von F) von der Basis $\mathcal{B}$ (alte Basis) in die Basis $\mathcal{E}$ (neue Basis) darstellt.

(c) Geben Sie die Matrix $\mathbf{R}$ an, welche den *Basiswechsel von* $\mathbb{R}^3$ (als Bildraum) von der Basis $\mathcal{B}$ (alte Basis) in die Basis $\mathcal{E}$ (neue Basis) darstellt.

(d) Beschreiben Sie die die Matrix $\widetilde{\mathbf{D}}$ der Abbildung F bezüglich der kartesischen Basis $\mathcal{E}$ mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{R}$ aus den vorhergehenden Teilaufgaben.

(e) Berechnen Sie die Matrix $\widetilde{\mathbf{D}}$ mit Hilfe von Teilaufgabe **(c)**.

8. Wir betrachten die lineare Selbstabbildung F, welche bezüglich der kartesischen Basis die Matrixdarstellung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Geben Sie die Matrixdarstellung $\widetilde{\mathbf{A}}$ von F bezüglich der Basis

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

an.

Hinweis: Überlegen Sie gut, bevor Sie rechnen! Die Rechnung ist sehr kurz.

9. Oft findet man lineare Abbildung nicht beschrieben durch eine Matrix sondern durch andere Operationen. In diesem Beispiel betrachten wir für $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Abbildung

$$\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathsf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \, ,$$

wobei $\times$ für das Vektorprodukt aus Abschnitt 1.6 der Vorlesung steht.

a) Repetieren Sie die Eigenschaften des Vektorprodukts.

b) Zeigen Sie, dass es sich bei F um eine lineare Abbildung handelt.

c) Was ist die Matrixdarstellung von F bzüglich der Kartesischen Basis aus Einheitsvektoren. Welche besondere Eigenschaft sehen Sie dieser Matrix sofort an?

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass man dazu zuerst die Bilder der Basisvektoren unter F bestimmen muss und dann deren Koordinaten. Das liefert die Spalten der Darstellungsmatrix.

d) Bestimmen Sie Kern(F).

Hinweis. Den Nullraum kann man F direkt "ansehen" oder auch einfach dadurch bestimmen, dass man den Kern der Darstellungsmatrix ausrechnet.

e) Was ist Rang(F)?

f) Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, \mathsf{F}(\mathbf{x}) \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

10. Abbildungen werden manchmal *prozedural* beschrieben, also durch Angabe einer Funktion in einer Programmiersprache. Dann ist es oft nicht einfach zu sehen, ob die Abbildung linear ist, und welches die zugehörige Matrixdarstellung ist.

In Listing 1 finden Sie sechs MATLAB-Funktionen, die jeweils einen Spaltenvektor `x` als Argument nehmen und einen Vektor `y` als Resultat zurückliefern. Der MATLAB-Quellcode kann auch von der Vorlesungswebseite heruntergeladen werden.

a) Bestimmen Sie für jede Funktion den Raum in dem der Rückgabewert `y` liegt (in Abhängigkeit von der Länge von `x`).

b) Welche dieser Funktionen beschreibt **keine** lineare Abbildung $\mathtt{x} \mapsto \mathtt{y}$? Begründen Sie Ihre Antwort in jedem Fall.

Hinweis: Man kann auch MATLAB die Falsifizierung überlassen.

c) Geben Sie für diejenigen Funkionen, die lineare Abbildungen $\mathtt{x} \mapsto \mathtt{y}$ beschreiben, die Matrixdarstellung bezüglich der Kartesischen Standardbasen an.

Hinweis: Diese Darstellung kann man sich für eine vorgegebene Länge von `x` leicht von MATLAB ausrechnen lassen, wenn man berücksichtigt, dass in der j. Spalte der Abbildungsmatrix einfach das Bild des j. Einheitsvektors stehen muss, wie in Abschnitt 4.2 der Vorlesung erklärt.

Listing 1: Verschiedene Funktionen: Linear oder nicht?

```
function y = a9_f1(x)
  y = (1:length(x))'.*x(end:-1:1);
end

function y = a9_f2(x)
  y = x*x'*(1:length(x))';
end

function y = a9_f3(x)
  n = length(x); y = [];
  m = floor(n/2);
  for l=1:m, y = [y;x(l) - l*x(2*l)]; end
end

function y = a9_f4(x)
  n = length(x);
  y = (diag(x)+ones(n,1)*ones(1,n))*(n:-1:1)';
end

function y = a9_f5(x)
   n = length(x);
   a = 2.^(0:n-1); a = [a,a,a];
   for l=1:n
     y(l) = 0;
     for k=1:n, y(l) = y(l) + x(k)*a(n-l+k); end
   end
end

```

Siehe nächstes Blatt!

```
function y = a9_f6(x)
  n =length(x);
  y = (1:n)*sparse([(1:n-1)';(1:n)';(2:n)'],...
                   [(2:n)';(1:n)';(1:n-1)'],...
                   [x(1:n-1);x;x(2:n)],n,n);
end
```

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 28.11.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13. Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG