Serie 10

1. Diese Aufgabe behandelt ein Detail aus dem Beweis von Satz 4.5.E aus der Vorlesung über die kanonische Matrixdarstellung von Projektionen.

Sei V ein Vektorraum der dimension $\dim(V) = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es sei eine Projektion $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(V,V)$ gegeben, wobei gilt

$$\begin{aligned} \left\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^r\right\} \subset V & \quad \text{ist eine Basis von } \mathrm{Bild}(P), \\ \left\{\mathbf{b}^{r+1}, \mathbf{b}^{r+2}, \ldots, \mathbf{b}^n\right\} \subset V & \quad \text{ist eine Basis von } \mathrm{Kern}(P)\,, \end{aligned}$$

für ein $1 \leq r \leq n$.

a) Wiederholen Sie den Begriff der *Basis* eines Vektorraums (Definition 2.1.A aus der Vorlesung) und den Begriff der *linearen Unabhängigkeit* (Definition 2.5.A aus der Vorlesung).

b) Zeigen Sie, dass $\left\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^n\right\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren in V ist.

Hinweis: Setzen Sie eine verschwindende Linearkombination der Vektoren an und wenden Sie darauf die Projektion an. Benutzen Sie dann Satz 4.5.B aus der Vorlesung und die Eigenschaften von Vektoren im Kern einer linearen Abbildung.

c) Begründen Sie, warum $\left\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^n\right\}$ eine Basis von V ist.

2. Implizit in Satz 4.5.E aus der Vorlesung ist enthalten, dass eine Projektion bereits dadurch eindeutig beschrieben ist, dass man ihren Kern und ihr Bild angibt.

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} \right\rangle = 0 \right\}, \\ W &:= \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist, indem Sie die Kriterien aus Definition 1.3.C der Vorlesung verifizieren.

b) Bestimmen Sie eine Basis von U.

Hinweis: Eine solche Basis ist natürlich nie und nimmer eindeutig.

c) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Projektion auf U parallel zu W die kanonische Matrixdarstellung aus Satz 4.5.E der Vorlesung hat.

Hinweis: Für die Projektion $\mathsf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf U parallel zu W gilt

$$\mathrm{Kern}(\mathsf{P}) = W \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) = U\,.$$

Bitte wenden!

d) Geben Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{P}$ der Projektion P auf U parallel zu W bezüglich der kartesischen Basis aus Einheitsvektoren an.

Hinweis: Man kann den Basiswechsel auf die Kartesische Basis des $\mathbb{R}^3$ vornehmen, wie er in Abschnitt 4.4 der Vorlesung erklärt worden ist, denn P ist eine lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^3$. Alternativ kann man die Bilder der Einheitsvektoren berechnen (In der Mathematik wie im Leben gibt es meist mehrere Wege zum einem Ziel).

3. In Abschnitt 4.6.2 der Vorlesung wurden orthogonale Matrizen eingeführt, die Isometrien im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ beschreiben. Die Orthogonalität einer Matrix verifiziert man üblicherweise direkt aus der Definition.

Gegeben ist nun die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & d \\ e & 0 & -f \end{pmatrix} , \tag{1}$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{R}_0^+$ ist die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen).

a) Wieviele Bestimmungsgleichungen für die Einträge einer 3×3-Matrix sind durch die Eigenschaft der Orthogonalität impliziert.

Hinweis: Beachten Sie, dass für $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3,3}$ das Matrixprodukt $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ immer *symmetrisch* ist.

b) Finden Sie Werte für die Parameter $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_0^+$ so, dass die Matrix $\mathbf{B}$ aus (1) orthogonal ist.

4. In den Abschnitten 4.6.3 und 4.6.4 der Vorlesung wurden mit Spiegelungen und Drehungen spezielle Isometrien behandelt. In dieser Aufgabe betrachten wir konkrete Beispiele im $\mathbb{R}^3$ und die Matrixdarstellung der Abbildungen (wie bereits für Drehungen in der Vorlesung diskutiert).

Die drei linearen längenerhaltenden Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^3$ F_1, F_2 und F_3 sind wie folgt definiert:

F_1: ist eine Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$.
F_2: $45°$-Drehung um die x_1-Achse.
F_3: $30°$-Drehung um die x_2-Achse.

a) Finden Sie die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ and F_3 bezüglich der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Einheitsvektoren.

Hinweis: Wie in Abschnitt 4.2 der Vorlesung erklärt, enthalten die Spalten der Darstellungsmatrix die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der hintereinandergeschalteten Abbildungen $\mathsf{F}_2 \circ \mathsf{F}_1$ und $\mathsf{F}_3 \circ \mathsf{F}_2$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Satz 4.2.E aus der Vorlesung.

Siehe nächstes Blatt!

5. Bei dieser Aufgabe geht es darum, die Isometrien in einer Schar von Abbildungen zu identifizieren. Es empfiehlt sich, vorher die Aufgabe 3 dieser Serie zu bearbeiten.

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & s & t \\ 0 & 0 & -1 \\ r & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Betimmen Sie für welche rellen Zahlen s, t und r die durch die Matrix beschriebene lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^3$ eine Isometrie ist.

Hinweis: Satz 4.6.2.B aus der Vorlesung macht die Aufgabe einfach.

6. Gegenstand dieser Aufgabe sind spezielle Isometrien in der Ebene und ihre Matrixdarstellung.

Wir betrachten die folgenden 2×2-Matrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \;, \quad \mathbf{I}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,$$

wobei $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *Einheitsvektoren* sind, das heisst $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Diese Matrizen definieren zwei lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^2$, die mit F und G abgekürzt werden.

a) Zeigen Sie, dass F und G Isometrien sind.

b) Sowohl für F als auch für G gibt es jeweils einen eindimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^2$, dessen Vektoren von F bzw. G auf sich selbst abgebildet werden. Beschreiben Sie diese Unterräume durch jeweils eine Formel.

c) Geben Sie eine geometrisch Interpretation von F und G in der Ebene und verdeutlichen Sie diese durch eine Skizze.

d) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung von F und G eine Drehung ist. Was ist der Drehwinkel?

Hinweis: Zum Nachweis der Drehungseigenschaft kann man die Matrixdarstellung von $\mathsf{G} \circ \mathsf{F}$ berechnen und dann Definition 4.6.4.1 aus der Vorlesung heranziehen.

e) Geben Sie eine geometrische Deutung des Resultats der vorhergehenden Teilaufgabe.

Hinweis: Geometrieunterricht in der 7./8. Jahrgangsstufe.

7. Immer wenn ein Gegenstand im Sonnenlicht einen Schatten wirft, freut sich der Kundige in linearer Algebra, denn er sieht darin sofort eine Projektion. Leider scheint um diese Jahreszeit in Zürich selten die Sonne, so dass wir als Ersatz MATLAB bemühen müssen.

Als Gegenstand nehmen wir das Drahtgerüst eines *Tetraeders*, das heisst, die Menge seiner Kanten. Unter einem Tetraeder versteht man einen Dreieckspyramide mit vier Eckpunkten, $\binom{4}{2} = 6$ Kanten, und $\binom{4}{3} = 4$ dreieckigen Seitenflächen. Im dreidimensionalen Raum wird ein Tetraeder eindeutig dadurch beschrieben, dass man vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, als Ecken vorgibt.

Bitte wenden!

Gegeben sei nun ein Tetraeder durch seine vier Eckpunkte $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4 \in \mathbb{R}^3$ (Koordinaten bezüglich der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^3$). Dabei sei die dritte Koordinate aller Punkte positiv. Die Richtung des Lichteinfalls sei parallel zu

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\vartheta \\ \sin\phi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} , \quad \phi \in [0, 2\pi[\, , \quad \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \, . \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\mathbf{u}$ aus (2) ein Einheitsvektor des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Die Schar der Abbildungen $\mathsf{S}_{\phi,\vartheta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi \in [0, 2\pi[$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\vartheta \neq 0$, ist beschrieben wie folgt:

> $\mathsf{S}_{\phi,\vartheta}(\mathbf{z})$ sind die beiden ersten Koordinaten des Schattens des Punktes $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, $z_3 > 0$, auf der Ebene $\{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, wenn das Licht aus Richtung $\mathbf{u}$ gemäss (2) "von oben" einfällt. Dabei können die Lichtstrahlen als parallel angenommen werden.

Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\mathsf{S}_{\phi,\vartheta}$ bezüglich der Kartesischen Basen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ an.

c) Repetieren Sie die Verwendung der Funktion `plot` von MATLAB.

d) Warum reicht die Funktion `plot` aus, um das Bild des Drahtgerüsts eines Tetraeders unter einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (bis auf Rundungsfehler) exakt zu zeichnen.

Hinweis: Satz 4.1.F. aus der Vorlesung.

e) Schreibe Sie eine MATLAB-Funktion

```
function plottetshadow(A,phi,theta)
```

die den Schatten den der Tetraeder auf die Ebene $\{x_3 = 0\}$ wirft, zeichnet, wenn das Licht aus Richtung $\mathbf{u}$ einfällt. Dabei enthalten die Spalten der 3×4-Matrix `A` die Koordinaten der Eckpunkte des Tetraeders, und `phi`, `theta` definieren die Einfallsrichtung des Lichts gemäss (2).

Hinweis: Für

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $\phi = \frac{\pi}{3}$, $\vartheta = \frac{2\pi}{5}$ sollte das Bild aussehen wie in Abbildung 1.

8. Wann ist der Schatten des Drahtgerüsts eines Tetraeders ein Dreieck? Experimentieren Sie mit Ihrer Implementierung von `plottetshadow`.

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 5.12.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13. Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG

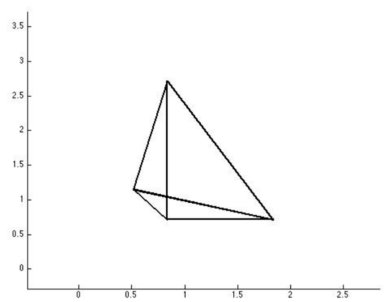

Abbildung 1: Schatten des Drahtgerüsts eines Tetraeders