Serie 11

Hinweis: Zentral sind in dieser Serie sind die Aufgaben **1.**, **2.**, **4.** und **7.**. Diese sollten auf jeden Fall gelöst werden.

1. Im Abschnitt 4.5 der Vorlesung wurde das Konzept der Orthogonalprojektion auf einen Unterraum eingeführt (siehe Def. 4.5.F), das für einen allgemeinen Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erklärt ist.

In dieser Aufgabe betrachten wir $V = \mathbb{R}^3$, aber wir verwenden **nicht** das Euklidische Skalarprodukt, sondern ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \,, \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto & \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_* := \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{w} \,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Weisen Sie nach, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

Hinweis: Dazu sind die Eigenschaften (SP1)–(SP4) aus Definition 1.4.D zu zeigen.

b) Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ die Orthogonalprojektion des Vektors $(4, 5, 6)^T$ auf den Unterraum, der von $(1, 1, 1)^T$ und $(1, 0, 1)^T$ aufgespannt wird.

Hinweis: Stellen Sie zuerst die verallgemeinerten Normalengleichungen auf, wie im Abschnitt 4.5 der Vorlesung erklärt. Das entstehende 2×2 lineare Gleichungssystem lässt sich ohne Probleme lösen.

c) Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ die Orthogonalprojektion des Vektors $(4, 5, 6)^T$ auf den Unterraum

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{x}, (1, 1, 1)^T \right\rangle_* = 0\} \,.$$

Hinweis. Einen Normalenvektor zu U kennen Sie bereits!

d) Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion

```
function vp = orthproject(B,v)
```

die die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ auf den von den Spalten der 3×2-Matrix `B` aufgespannten Unterraum berechnet, wobei das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ zugrundegelegt werden soll.

Hinweis: In MATLAB lassen sich die Matrix und den Rechte-Seite-Vektor der verallgemeinerten Normalengleichungen durch einfache Matrixprodukte ohne Schleifen berechnen.

2. Diese Aufgabe soll Ihnen die Gelegenheit geben, die in Abschnitt 4.6.4.1 der Vorlesung eingeführten Rotationen in 2D und deren Matrixdarstellungen zu üben.

Im folgenden verwenden wir die Notation

$$\mathbf{D}(\phi) := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \;, \quad \phi \in [0, 2\pi[\;. \tag{4.6.4.1.A}$$

für eine Rotationsmatrix in der Ebene.

a) Zeige dass alle Matrizen $\mathbf{D}(\phi)$ *orthogonal* sind.

Hinweis. Direkte Rechnung gemäss Definition 4.6.2.A.

b) Zeige, dass die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{D}(\phi)\mathbf{x}$ tatsächlich den Winkel ϕ einschliessen und zwar für beliebiges $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

c) Zeige, dass die Hintereinanderausführung von Rotationen in der Ebene kommutiert, das heisst, dass

$$\mathbf{D}(\phi)\mathbf{D}(\psi) = \mathbf{D}(\psi)\mathbf{D}(\phi) \quad \text{für beliebige Winkel} \quad \phi, \psi\;.$$

Hinweis: Verwende geeignete trigonometrische Identitäten, wie man sie etwa auf unter http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities findet.

3. In dieser Aufgabe betrachten wir Rotationen in 3D, wie sie in Abschnitt 4.6.4.2 der Vorlesung behandelt wurden.

a) Wiederholen Sie den Inhalt von Abschnitt 4.6.4.2 und studieren Sie die Implementierung der MATLAB-Funktion `rotmatrix` (Code 4.6.3).

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung (bzgl. der Kartesischen Basis aus Einheitsvektoren) der Rotation um den Winkel 30° mit (gerichteter) Achse $(1, 2, 1)^T \in \mathbb{R}^3$.

Hinweis: Die Rechte-Hand-Regel soll Anwendung finden. Sie können Ihre Rechnung mit der MATLAB-Funktion `rotmatrix` überprüfen.

4. Wiederum geht es um Rotationen in 3D, siehe Abschnitt 4.6.4.2 der Vorlesung. Gegeben Sei nun ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ in Koordinaten bzgl. der Kartesischen Basis. Gesucht ist die Matrixdarstellung einer *Rotation*, die den "Vektorpfeil" von $\mathbf{v}$ so dreht, dass er auf der positiven x_1-Achse zu liegen kommt.

a) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an bzgl. derer die Matrix der gesuchten Rotation die einfache Gestalt

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \;, \quad \text{mit} \quad \phi \in [0, 2\pi[\;, \tag{4.6.4.2.B}$$

hat.

Hinweis. Vergessen Sie nicht, den Fall, dass $\mathbf{v}$ parallel zur x_1-Achse ist, gesondert zu behandeln!

b) Wie lässt sich der Winkel ϕ in der Matrixdarstellung (4.6.4.2.B) einfach ausrechnen?

c) Schreiben Sie nun eine MATLAB-Funktion

```
function D = findrot(v)
```

Siehe nächstes Blatt!

die die 3×3-Matrix der gesuchten Drehung bzgl. der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^3$ ausrechnet und als `M` zurückgibt. Das Argument `v` ist der Spaltenvektor $\mathbf{v}$.

Hinweis. Sie können die Funktion `rotmatrix` aus Code 4.6.3 verwenden. Für $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ sollte Ihr Programm die folgende Matrix als Ausgabe liefern:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.2673 & 0.5345 & 0.8018 \\ -0.5345 & 0.7745 & -0.3382 \\ -0.8018 & -0.3382 & 0.4927 \end{pmatrix}$$

d) Implementieren Sie ein MATLAB-Skript, das Ihre Funktion `findrot` testet.

Hinweis. Überlegen Sie sich genau, was alles zu testen ist.

5. Diese Aufgabe hat Spiegelungen zum Gegenstand, wie sie in Abschnitt 4.6.3. der Vorlesung behandelt wurden.

Betrachtet werde der Vektorraum $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Gegeben sei der Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ und es bezeichne $\mathsf{R} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ diejenige lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^d$, die eine Spiegelung an der Hyperebene mit Normalenvektor $\mathbf{n}$ realisiert.

a) Repetieren Sie den Inhalt von Abschnitt 4.6.3 der Vorlesung.

b) Zeige, dass es zu jeder Spiegelung in einem Vektorraum V (mit Skalarprodukt) eine Basis von V so gibt, bezüglich derer die Spiegelung durch eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\in \{1, -1\}$ dargestellt wird.

Hinweis: Rufen Sie Sich Satz 4.5.E aus der Vorlesung in Erinnerung und verwenden Sie ihn zusammen mit Definition 4.6.3.A.

c) Bezüglich welcher Basis des $\mathbb{R}^d$ lässt sich konkret R durch eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\in \{1, -1\}$ darstellen.

d) Berechnen Sie eine Basis nach der in der vorhergehenden Teilaufgabe gefragt wurde für $d = 3$ und $\mathbf{n} = (1, 1, 1)^T$.

e) Berechnen Sie für das Beispiel aus der vorhergehenden Teilaufgabe die Matrixdarstellung von R bzgl. der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

f) Entwickeln Sie eine MATLAB-Funktion

```
function Rmat = reflectionmatrix(n)
```

die allgemein für gegebenem Normalenvektor `n` die Matrixdarstellung von R bzgl. der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^d$ berechnet.

Hinweis. Erinnern Sie sich daran, dass Sie mit Hilfe der MATLAB-Funktion `qr()` eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$ erhalten können, deren erster Vektor parallel zu einem gegebenen Vektor ist. Dies ist demonstriert in Code 4.6.3 (`rotmatrix`) aus der Vorlesung.

6. Die moderne Signalverarbeitung ist undenkbar ohne den Einsatz komplexer Algorithmen aus der linearen Algebra. So liegt etwa vielen Techniken zur Kompression von Audiosignalen eine Orthogonalprojektion zugrunde, siehe Definition 4.5.F aus der Vorlesung.

Wir betrachten Audiosignale als Vektoren im $\mathbb{R}^n$ wie in Abschnitt 1.1.2 der Vorlesung erklärt. Eine Kompression eines Audiosignals kann dadurch erreicht werden, dass man es auf einen Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim U < n$ orthogonal (bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts) projiziert.

Bitte wenden!

Für dieses Aufgabe nehmen wir an, dass n gerade ist und dass U aufgespannt wird durch die folgenden "Signale" (= Vektoren)

$$U = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}\ , \quad \mathbf{a}^k := (a_j^k)_{j=1}^n,\ a_j^k = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, wenn } j \in \{2k-1, 2k\}\ , \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2}$$

wobei $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}$ gemäss (2) eine Orthonormalbasis von U bildet.

b) Es sei $\{\boldsymbol{n}^1, \ldots, \boldsymbol{n}^l\}$ eine Orthonormalbasis eines l-dimensionalen Unterraums des Vektorraums V (mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$). Zeige, dass dann die *Orhtogonalprojektion* $\mathsf{P}_U \in \mathcal{L}(V, V)$ auf U gegeben ist durch

$$\mathsf{P}_U \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{l} \left(\mathbf{v}, \mathbf{n}^j\right) \mathbf{n}^j\ . \tag{3}$$

Hinweis. Verifizieren Sie zunächst, dass es sich bei P_U aus (3) um eine lineare Selbstabbildung von V handelt. Anschliessend ist noch die Bedingung aus Definition 4.5.F. der Vorlesung nachzuweisen. Dabei sollte man sich daran erinnern, dass *alle* Vektoren in U durch Linearkombination von Basisvektoren erhalten werden können. Natürlich muss man auch die Eigenschaften einer Orthonormalbasis gemässt Definition 4.6.5.A der Vorlesung verwenden.

c) Es bezeichne im Folgenden $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Orthogonalprojektion auf den Unterraum U aus (2).

Jeder Vektor $\mathbf{u} \in U$ lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ schreiben. Gib eine Formel an, die die entsprechenden Koeffizienten von $\mathsf{L}\mathbf{v}$ ausrechnet, wenn die $\mathbf{v}$ Koordinaten v_j, $j = 1, \ldots, n$, von $\mathbf{v}$ bzgl. der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^n$ bekannt sind.

Hinweis. Verwenden Sie die Resultate aus den beiden vorhergehenden Teilaufgaben.

d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function vsmall = encode(vbig)
```

die die Koeffizienten von $\mathsf{L}\mathbf{v}$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}$ von U ausrechnet und zurückgibt. Dabei werden die Kartesischen Koordinaten von $\mathbf{v}$ in `vbig` übergeben.

e) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von L bzgl. der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^n$.

f) Geben Sie eine (möglichst einfache) Basis von Kern(L) an.

g) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function vbig = decode(vsmall)
```

die aus den Koeffizienten der Basisdarstellung bzgl. $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}$ (übergeben im Spaltenvektor `vsmall`) das Signal in der Kartesischen Basisdarstellung zurückgibt (Koordinaten im Spaltenvektor `vbig`).

h) Hören Sie sich das Ergebnis der Kompression an, siehe Listing 1. Dieser Code ist auch in der Sammlung von MATLAB-Programmen verfügbar.

Siehe nächstes Blatt!

Listing 1 – Low-pass-Filterung eines Audiosignals

```
% MATLAB script: Compression of audio signal by orhtogonal projection (low pass filtering)
% Read signal into column vector v. Also read sample rate, number of bits
% per sample
[v,Fs,nbits] = wavread('hello.wav');
v = reshape(v,length(v),1); % Garantiere, dass v ein Spaltenvektor ist.
% Next, play sound through the computer's audio output device
soundsc(v,Fs,nbits);
% Now do low pass filtering retaining only half of the information content
vsmall = encode(v);
% The coefficients stored in vsmall are transmitted over a channel
% Now recover a signal in the original format
vnew = decode(vsmall);
% Play the compressed signal
soundsc(vnew,Fs,nbits);
```

In dieser Aufgabe bezeichne $\mathbb{P}_d$ den Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq d$, $d \in \mathbb{N}$, ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$(p,q) := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t\ , \quad p,q \in \mathbb{P}_d\ . \tag{4}$$

und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \dots, t \mapsto t^d\}\ . \tag{5}$$

Weiter seien die linearen Abbildungen $\mathsf{L}_d : \mathbb{P}_d \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathsf{L}_d(p) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix}\ , \quad p \in \mathbb{P}_d\ . \tag{6}$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \\ P_1(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}t\ , \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2-1)\ . \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

7. **a)** Geben Sie die Matrixdarstellung von L_2 bzgl. der monomialen Basis von $\mathbb{P}_2$ und der Kartesischen Basis von $\mathbb{R}^2$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\{P_0, P_1, P_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_2$ ist.

c) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung von L_2 bzgl. der Basis $\{P_0, P_1, P_2\}$ von $\mathbb{P}_2$ und der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^2$.

Bitte wenden!

d) Was ist für allgemeines d der Rang von L_2? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Zeigen Sie, dass für $d \geq 2$

$$\{t \mapsto 1-t^2, t \mapsto t(1-t^2), t \mapsto t^2(1-t^2), \ldots, t \mapsto l^{d-2}(1-t^2)\} \tag{7}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathsf{L}_d)$ ist.

Hinweis. Bestimmen Sie zunächst $\dim \mathrm{Kern}(\mathsf{L}_d)$. Die lineare Unabhängigkeit der Polynome der Monombasis wurde in der Vorlesung gezeigt und darf ohne Beweis verwendet werden.

f) Berechnen Sie für $t \mapsto t^n \in \mathbb{P}_d$, $n \leq d$, die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{P}_2$.

Hinweis. Die Formel (3) aus einer vorhergehenden Aufgabe kann verwendet werden in Kombination mit dem Resultat aus Teilaufgabe (b).

- **Abgabe der Serien:** Donnerstag, 12.12.2013 in der Übungsgruppe oder bis 16:00 Uhr in den Fächern im Vorraum zum HG G 53. Die Serien müssen sauber und ordentlich geschrieben und zusammengeheftet abgegeben werden, sofern eine Korrektur gewünscht wird.
- **Semesterpräsenz:** Montag, 15:15 - 17:00 Uhr, ETH Zentrum, LFW E 13. Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen.
- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG