Serie 13

1. (Multiple choice Aufgabe)

In Abschnitt 5.4 der Vorlesung finden Sie detaillierte Beispiele für die Berechnung des *charakteristischen Polynoms* von 3×3-Matrizen. Es empfiehlt sich, diese Beispiele nochmals anzuschauen und sich auch den Zusammenhang zwischen Nullstellen des charakteristischen Polynoms und Eigenwerten einer Matrix nochmals klarzumachen.

Die Aufgabe wiederholt ebenfalls die Diagonalisierungstechnik zur Lösung von autonomen linearen Differentialgleichungen $\mathbf{y}(x)' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, wie in Abschnitt 5.1 der Vorlesung besprochen. Wir verwenden hier nun die fundamentale Einsicht,

> dass die blosse Kenntnis der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ bereits Vorhersagen über das qualitative Verhalten der Lösungen für $x \to \infty$ erlaubt.

Diese Vorhersagen lassen sich nämlich sofort aus dem Verhalten der Funktion $x \mapsto e^{\lambda x}$ für $x \to \infty$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{C}$ ableiten. Das sollte aus der Analysisvorlesung bekannt sein. Überlegen Sie sich auf jeden Fall nochmals genau, für welche komplexen $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $x \mapsto e^{\lambda x}$ periodisch ist oder für $t \to \infty$ gegen ∞ strebt oder gegen 0.

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ hat die komplexen (!) Eigenwerte

○ -1 ○ 1 ○ i ○ $-i$ ○ $1-i$

Für das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{y}}(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x)$$

gilt

- ○ Für alle Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(0)$ bleibt die Lösung beschränkt für $x \to +\infty$.
- ○ Für alle Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(0) \neq 0$ geht $\|\mathbf{y}(x)\| \to \infty$ für $x \to +\infty$.
- ○ Die Lösung ist periodisch für alle Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(0)$.
- ○ Es gibt Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(0) \neq 0$, für die die Lösung periodisch ist.

2. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -2y_1(t) + y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t) - \frac{1}{2}y_2(t). \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ des Systems.

b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangswertbedingung

$$y_1(0) = y_2(0) = 1\,.$$

c) Skizzieren Sie den Verlauf der entsprechenden Lösung in der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$, d.h. die Bildmenge der Abbildung

$$\begin{aligned}[0,\infty) &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \mathbf{y}(t)\,.\end{aligned}$$

3. In der Analysisvorlesung haben Sie Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten kennengelernt:

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0\,, \quad a_k \in \mathbb{R}\,, \quad k = 1,\ldots,n\,, \tag{1}$$

wobei $f^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung der Funktion f nach x steht. In Analysis haben Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung bestimmt, indem Sie zunächst die Nullstellen des sogenannten *charakteristischen Polynoms*

$$Q(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{2}$$

bestimmten. Warum heisst dieses Q ebenfalls "charakteristisches Polynom", genauso wie das in Abschnitt 5.4 der Vorlesung eingeführte Polynom als dessen Nullstellen man die Eigenwerte einer Matrix erhält? Das ist kein Zufall und soll in dieser Aufgabe beleuchtet werden.

a) Wie auch in dem Beispiel $f''(x) = f(x)$ aus der Vorlesung wandeln wir die Differentialgleichung (1) um in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, indem wir den Hilfsvektor

$$\mathbf{y}(x) := \begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\\ \vdots\\ f^{(n-1)}(x)\end{pmatrix} \tag{3}$$

einführen. Zeigen Sie, dass, wenn f (1) löst, dann gilt

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}_n\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & 0 & 1 & 0\\ 0 & & & & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}\,. \tag{4}$$

Hinweis: Lösen Sie (1) nach $f^{(n)}(x)$ auf.

b) Nun wollen wir das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ aus (4) bestimmen. Angesichts der fürchterlich komplizierten Determinantenformeln für eine allegemeine $n \times n$-Matrix erscheint das aussichtslos, ist es aber nicht, denn Satz 5.2.B aus der Vorlesung, der uns die Invarianz der Determinante bei Spaltenumformungen sicherstellt, erlaubt es, die Matrix

Siehe nächstes Blatt!

sukzessive zu Vereinfachen, ohne Ihre Determinante zu ändern. Wir machen uns das zuerst an einem kleinen 3×3-Beispiel klar.

Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten und bestimme dann mit Hilfe der Formel für die Determinante einer Dreiecksmatrix den Wert:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \frac{a_0}{\lambda} & -a_2 - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -a_0 & -a_1 - \frac{a_0}{\lambda} & -\lambda - a_2 - \frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_0}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Welche Spaltenumformungen transformieren die Matrizen ineinander?

c) Was ist also das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}_3$?

d) Nun wenden Sie bitte die analogen Spaltenumformungen, wie in der vorhergehenden Teilaufgabe auf die Matrix $\mathbf{A}_n$ an. Natürlich braucht man nun $n-1$ solche Spaltenumformungen, die von links nach rechts fortschreitend jeweils zwei benachbarte Spalten der Matrix geeignet kombinieren. Welche untere Dreiecksmatrix erhalten Sie?

e) Berechnen Sie nun das charakteristische Polynom $\chi_{\mathbf{A}_n}(\lambda)$. Was liefert der Vergleich mit Q aus (2)?

4. Satz 5.4.H aus der Vorlesung garantiert die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, die zu *verschiedenen Eigenwerten* von $\mathbf{A}$ gehören. Für eine spezielle Klasse von Matrizen kann man eine viel stärkere Aussage einfach beweisen, nämlich den folgenden Satz:

Satz. Erfüllt die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ die Bedingung

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A} , \tag{5}$$

ist sie also vertauschbar mit ihrer konjugiert Transponierten $\mathbf{A}^H$, so sind jeweils zwei Eigenvektoren, die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören, *orthogonal.*

Beachte, dass wir in dieser Aufgabe konsequent mit komplexen Matrizen und Vektoren rechnen, wie in Abschnitt 5.3 der Vorlesung erklärt.

a) Studieren Sie nochmals Satz 3.9.2.D aus der Vorlesung und seinen Beweis.

b) Zeigen Sie, dass für eine Matrix, die (5) erfüllt, gilt

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}^H) .$$

Hinweis. Teilaufgabe a) und die Rechenregeln für das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$, insbesondere Formel (5.3.B) aus der Vorlesung.

c) Zeigen Sie, dass aus der Eigenschaft (5) der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ folgt:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^H = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^H(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} .$$

Hinweis: Für komplexe Matrizen gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Matrizen.

Bitte wenden!

d) Beweisen Sie, dass jeder Eigenvektor von $\mathbf{A}$ auch ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^H$ ist und umgekehrt.

Hinweis: Aus der Definition von Eigenvektoren wissen wir, dass sie Elemente des Kerns von bestimmten Matrizen sind. Diese Matrizen sind uns bereits in der vorherigen Teilaufgabe begegnet. Geht Ihnen ein Licht auf? Teilaufgabe b) !

e) Beweisen Sie nun den obigen Satz unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe d).

Hinweis: Orthogonalität von zwei Eigenvektoren $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$ zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 bedeutet: $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$. Wir wissen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es genügt also, zu zeigen $\lambda_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda_2 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Benutzen Sie dazu Formel (5.3.B) aus der Vorlesung.

5. Wir haben in Abschnitt 5.4 der Vorlesung gesehen, wie man im Prinzip die Eigenwerte einer Matrix und zugehörige Eigenvektoren bestimmt. "Im Prinzip" deswegen, da die Nullstellen von Polynomen vom höherem Grad nicht mehr exakt berechenbar sind, und bereits ab Grad 3 nur mit sehr komplizierten Formeln. Für Matrizen mit spezieller Struktur lassen sich die Eigenwerte (und oft auch die Eigenvektoren) manchmal "ablesen". Ein Beispiel sind Dreiecksmatrizen, ein anderes wird in dieser Aufgabe diskutiert.

Für einen Spaltenvektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die symmetrischen Matrizen

$$\mathbf{M} := \mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T \in \mathbb{R}^{n,n} \; . \tag{6}$$

a) Bestimmen Sie die alle Eigenwerte von $\mathbf{M}$ und beschreiben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von $\mathbf{M}$.

Hinweis: Wir wirkt $\mathbf{M}$ auf Vektoren, die bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbf{v}$ senkrecht stehen? Wie wirkt $\mathbf{M}$ auf $\mathbf{v}$ selbst?

b) Was ist die Menge der Eigenwerte jeder Spiegelung, die nichttrivial ist, das heisst, sie ist verschieden von der Identitätsabbildung und der Nullabbildung?

Hinweis: Erinnern Sie sich an Definition 4.6.3.A einer Spiegelung und Satz 4.5.E. über Projektionen.

c) Für welche $\mathbf{v}$ genau ist die lineare Abbildung $\mathbf{x} \to \mathbf{M}\mathbf{x}$ eine Spiegelung? Weisen Sie die Spiegelungseigenschaft gemaäss Definition 4.6.3.A. bitte detailliert nach.

Hinweis: Natürlich sollen Sie damit beginnen, die Einsichten aus den beiden vorhergehenden Teilaufgaben zu kombinieren.

6. In Abschnitt 5.1 der Vorlesung wurde demonstriert, dass sich bei Kenntnis von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Iterierten $\mathbf{y}^{(k)}$ einer durch sie erzeugte linearen Rekursion $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}$ geschlossen ausdrücken lassen. In Aufgabe 3 von Serie 12 wurde dies ausgenutzt, um vorherzusagen, wie sich die $\mathbf{y}^{(k)}$ für $k \to \infty$ verhalten. In dieser Aufgabe stellen wir ähnliche Untersuchungen an, wobei wir nun ausnutzen, dass wir wissen, wie sich Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen lassen.

Konkret betrachten wir die "verallgemeinerte Fibonacci-Folge"

$$z^{(0)} = 1 \quad , \quad z^{(1)} = 1 \quad , \quad z^{(k+1)} = z^{(k)} + \alpha z^{(k-1)} \; , \quad k \in \mathbb{N} \; , \tag{7}$$

mit einem rellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Setzen Sie $\mathbf{y}^{(k)} = (z^{(k)}, z^{(k-1)})^T \in \mathbb{R}^2$ und formen Sie (7) in ein lineare Rekursion $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ für die Vektoren $\mathbf{y}^{(k)}$ um. Was ist $\mathbf{y}^{(1)}$?

Siehe nächstes Blatt!

b) Bestimmen Sie allgemein die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$ aus der vorhergehenden Teilaufgabe.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathbf{A}$ auch komplexe Eigenwerte haben kann. Diese Aufgabe demonstriert auch, dass man sich das Leben dadurch einfacher machen kann, dass man nicht alle bekannten Ausdrücke einsetzt, sondern abstrakte Symbole stehen lässt. In dieser Aufgabe sollte man die Eigenwerte also als λ_1, λ_2 stehen lassen, wenn man die Eigenvektoren mit Hilfe von Gausselimination ausrechnet.

c) Skizzieren Sie die Lage der Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene für

$$\alpha \in \left\{-\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}.$$

d) Für welche Werte von α ist die Matrix $\mathbf{A}$ **nicht** diagonalisierbar?

Hinweis: Erinnern Sie sich an Satz 5.4.I. aus der Vorlesung. Sie müssen also herausfinden, wann das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ zwei verschiedene Nullstellen hat. Dies kann man aus der Diskriminantenformel ablesen.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathbf{y}^{(1)}$ bezüglich einer Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ für alle Werte von α für die $\mathbf{A}$ aus Teilaufgbe a) diagonlisierbar ist.

f) (Schwierig!) Für welche Werte von α, für die $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist (vgl. Teilaufgabe d)), bleibt die Folge aus (7) beschränkt?

Hinweis. Dies ist eine sehr komplexe Aufgabenstellung. Sie müssen zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Matrix $\mathbf{A}$ hat zwei reelle Eigenwerte.
2. Die Matrix $\mathbf{A}$ hat zwei *konjugiert komplexe Eigenwerte.*

In beiden Fällen müssen Sie zunächst überprüfen, welche Eigenwerte einen Betrag ≤ 1 haben. Ziehen Sie Teilaufgabe c) heran. Anschliessend ist zu verifizieren, ob ausschliesslich die dazugehörigen Eigenvektoren zu $\mathbf{y}^{(1)}$ beitragen.

7. Wiederum sehen wir hier eine Klasse von Matrizen, von denen sich Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen lassen, ohne dass man sich die Mühe machen muss, Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu berechnen.

Diese speziellen Matrizen sind symmetrische $n \times n$-Tridiagonalmatrizen mit konstanten (Neben)diagonalen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{s}^k = \left(\sin(\pi \frac{kj}{n+1})\right)_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, n$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind. Geben Sie die auch die Eigenwerte explizit an.

Bitte wenden!

Hinweis. Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \;,$$

und dass $\sin(\pi k) = \sin(\frac{\pi k(n+1)}{n+1}) = \sin(\frac{\pi k}{n+1} + \frac{\pi k n}{n+1})$.

b) Zeigen Sie, dass je zwei Eigenvektoren einer beliebigen reellen *symmetrischen* Matrix zu *verschiedenen* Eigenwerten orthogonal (bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts) zueinander sind.

c) Was folgt für die $\mathbf{s}^k$ aus der in der vorhergehenden Teilaufgabe hergeleiteten Aussage.

d) Berechnen Sie die Euklidischen Normen der Eigenvektoren $\mathbf{s}^k$.

Hinweis: Benutzen Sie die trigonometrische Identität

$$\sin^2(\pi x) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x)) = \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{Re}\exp(2\pi\, i\, x)) \;.$$

Anschliessend fahren Sie fort wie in Aufgabe 1 von Serie 12.

8. Eigenwerte und Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen spielen eine grosse Rolle zur Charakterisierung von mechanischen Systemen. In dieser Aufgabe wird ein einfaches "eindimensionales" mechanisches System betrachtet, nämlich eine Kette von durch Federn verbundenen (Punkt)massen, die sich reibungsfrei horizontal bewegen können, siehe Abbildung 1.

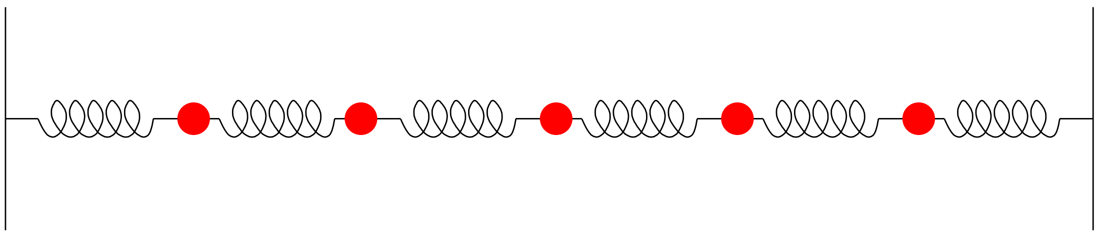

Abbildung 1: Kette aus Punktmassen und Verbindungsfedern

Wir betrachten n gleichen Punktmassen (Masse jeweils m) und $n+1$ gleichen Federn. Die Endpunkte der Kette haben einen Abstand von 1m. Die Gleichgewichtslänge der Federn sei gerade $\frac{1}{n+1}$m. Nach dem Hookschen Gesetz für ideale Federn gilt daher für die Federkraft bei Federlänge l

$$F(l) = \varkappa(l - \frac{1\mathrm{m}}{n+1}) \;, \tag{8}$$

wobei $\varkappa > 0$ die Federkonstante ist (Einheit $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$). Dabei ist das Vorzeichen so gewählt, dass Zug am Aufhängepunkt der Feder einer positiven Kraft entspricht.

Es bezeichne nun $0 < y_k(t) < 1$ die Position der k. Punktmasse zu Zeitpunkt t. Das bedeutet, dass gemäss (8) auf den k. Massenpunkt zum Zeitpunkt t die Kraft

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \varkappa(y_{k+1}(t) - y_k(y) - \frac{1\mathrm{m}}{n+1}) - \varkappa(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \frac{1\mathrm{m}}{n+1}) \\ &= \varkappa(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)) \;. \end{aligned} \tag{9}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dabei wird der Einfachheit halber $y_0(t) := 0$ und $y_{n+1}(t) := 1$ gesetzt. Man beachte, dass die Gleichgewichtslänge der Federn in die Formel für $F_k(t)$ letztendlich nicht mehr eingeht.

Nach dem Newtonschen Gesetz gilt nun für die Beschleunigung der k. Masse

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}y_k(t) = F_k(t)\;, \tag{10}$$

a) Schreiben Sie zunerst (10) in der Form

$$\begin{pmatrix} m\frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \vdots \\ m\frac{d^2}{dt^2}y_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ y_{n+1}(t) \end{pmatrix}\;, \tag{11}$$

mit einer geeigneten Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n+2}$. Geben Sie $\mathbf{B}$ explizit an.

b) Fassen Sie die unbekannten Massenpositionen $y_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, zum zeitabhängigen Vektor $\mathbf{y}(t) := (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ zusammen. Schreiben Sie dann (11) in der äquivalenten Form

$$\frac{m}{\varkappa}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{e}^n\;, \tag{12}$$

mit einer geeigneten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und dem n-ten Einheitsvektor $\mathbf{e}^n \in \mathbb{R}^n$.

c) Der Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ erfülle $\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{e}^n = \mathbf{0}$. Welche Differentialgleichung erfüllt der zeitabhängige Vektor $\mathbf{w}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{z}$, wenn $\mathbf{y}(t)$ eine Lösung von (12) ist?

d) Welche besonderen Eigenschaften hat die Matrix $\mathbf{A}$? Zu welcher Klasse von Matrizen gehört sie? Ist $\mathbf{A}$ diagonalisierbar.

e) Nehmen Sie an, dass $\mathbf{A}$ bereits diagonalisiert vorliegt:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \lambda_l < 0\;,$$

Wobei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine orthogonale Matrix ist. Was ist in diesem Fall die allgmeine Lösung von (12).

Hinweis: Folgen Sie dem Vorgehen für autonome lineare Differentialgleichungen wie in Abschnitt 5.1 der Vorlesung erklärt, um die in der vorhergehenden Teilaufgabe hergeleitete Differentialgleichung, die $\mathbf{w}$ erfüllt in entkoppelte skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu transformieren.

Aus Analysis wissen Sie dann, dass $z''(x) = -\lambda z(x)$ für $\lambda > 0$ die allgemeine Lösung $z(t) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}t) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, besitzt. Das kann man übrigens auch dadurch herleiten, dass man $z''(x) = -\lambda z(x)$ in die Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{M}\mathbf{y}(x) \quad \text{mit} \quad \mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

transformiert und dann $\mathbf{M}$ diagonalisiert. So findet man die allgemeine Lösung für $\mathbf{w}(t)$. Diese muss man dann auf $\mathbf{y}(t)$ zurücktransformieren.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe der Aufgabe **7** dieser Serie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ aus (12).

Bitte wenden!

- **Abgabe der Serien:** Für diese Serie gibt es keine Abgabemöglichkeit. Sie gilt als "Ferienserie" und kann bei Bedarf in den Ferienpräsenzen (siehe weiter unten) besprochen werden.

- **Ferienpräsenz:**

  – Montag, 13.01.2014, 15:15-17:00 Uhr, HG E 41

  – Montag, 27.01.2014, 15:15-17:00 Uhr, HG D 3.2

  – Montag, 10.02.2014, 15:15–17:00 Uhr, HG D 3.2

  Falls keine grosse Nachfrage besteht, warten die Assistenten auch hier maximal eine halbe Stunde. Wir bitten Sie deshalb, bei Fragen so früh als möglich zu erscheinen. Weitere allgemeine Präsenzen (nicht nur für diese Vorlesung) werden bald bekannt gegeben unter
  http://www.sam.math.ethz.ch/teaching/ferienpraesenz .

- **Ankündigung:** Am Dienstag, den 24.01.2013 gibt es morgens eine Besprechung der MATLAB-Projekte und am Nachmittag wird es eine Übungsbesprechung der Serie 13 geben. Genauere Angaben (Raum und Zeit) werden so bald als möglich auf der Vorlesungshomepage publiziert.

- **Homepage:** Hier werden zusätzliche Informationen zur Vorlesung und die Serien und Musterlösungen als PDF verfügbar sein.
  www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/linalgnum_BAUG