Übungsserie 2. HS 2013. Seite 1

(1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-5) \\ 5-3 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-(-5) \\ 11-3 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 11-5 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-40 \\ 60-36 \\ 48-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-30 \\ 30-6 \\ 36-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$

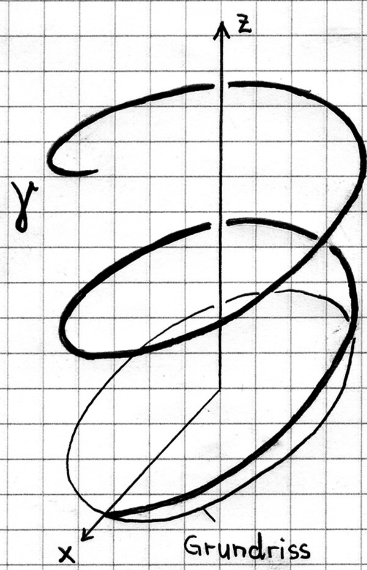
6 2   12 8   6 2   6 6   12 8   6 6

(b) $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -168 + 48 + 120 = 0$, $\quad \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -336 + 192 + 144 = 0$

(c) $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = \sqrt{(-28)^2 + 24^2 + 24^2} = \underline{\underline{44}}$ Flächeninhalt des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms

---

(2) (a) Der "Grundriss" von γ ist eine Ellipse mit Mittelpunkt in $(0,0,0)$ und Halbachsen $a = 1.4$ (auf der x-Achse), $b = 0.7$ (auf der y-Achse)



Für $P = (x, y, 0)$ gilt: $\left.\begin{array}{l} x(t) = 1.4\cos t \rightsquigarrow x(0) = 1.4 \\ y(t) = 0.7\sin t \rightsquigarrow y(0) = 0 \\ 0 \overset{\text{soll}}{=} t \end{array}\right\} \underline{\underline{P = (1.4, 0, 0)}}$

(b) Tangentialvektor an γ in P (t-Wert: $t = 0$)

$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -1.4\sin t \\ 0.7\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1 \end{pmatrix}$; Vertikalrichtung: $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Neigungswinkel von γ bzw. $\vec{r}\,'(0)$ bezüglich Vertikale:

$$\cos\alpha_0 = \frac{\vec{r}\,'(0) \cdot \vec{e}_3}{|\vec{r}\,'(0)| \cdot |\vec{e}_3|} = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{0.7^2 + 1} \cdot 1} = 0.8192 \rightsquigarrow \alpha_0 = 34.99^\circ$$

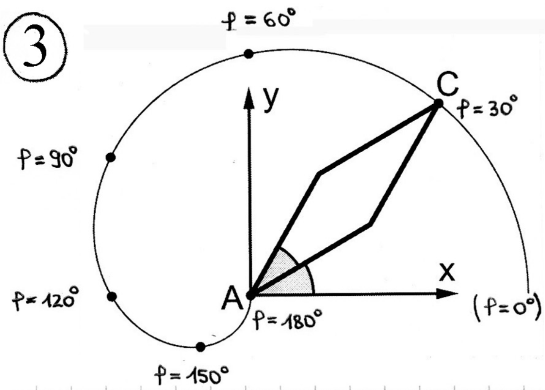
Neigungswinkel bez (x,y)-Ebene: $90^\circ - \alpha_0 = \underline{55.01^\circ}$

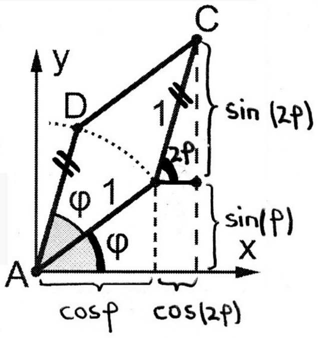
(c) Nein, α ändert fortwährend mit t: $\quad \cos\alpha(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(-1.4\sin t)^2 + (0.7\cos t)^2}}$, $\quad$ z.B. $t = \pi/2 \rightsquigarrow \alpha = 44.42^\circ$

(t entspricht übrigens auch nicht dem Drehwinkel)

---

(3)





$x(\varphi) = \cos\varphi + \cos(2\varphi)$

$y(\varphi) = \sin\varphi + \sin(2\varphi)$ $\quad (0 \le \varphi \le 180^\circ)$

$\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \cos(2\varphi) \\ \sin\varphi + \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$

4 (a) Kreis K mit Radius 3 und Mittelpt (0,0,0) : $\varphi \longmapsto \vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}3\cos\varphi\\3\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$ (b) $\rightsquigarrow$ Mittelpt M_φ von c

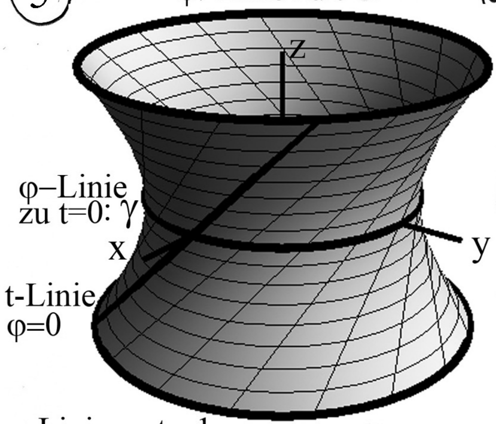
Kreis c mit Radius 2 und Mittelpt (0,3,0): $t \longmapsto \vec r(t) = \begin{pmatrix}0\\2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\cos t+3\\2\sin t\end{pmatrix}$

(b) Kreis c bez M_φ : $\overrightarrow{M_\varphi P} = \begin{pmatrix}0\\2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}$, bez O: $\vec r(\varphi,t) = \overrightarrow{OM_\varphi} + \overrightarrow{M_\varphi P} = \begin{pmatrix}3\cos\varphi\\3\sin\varphi\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cos\varphi\\3\sin\varphi+2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}$

Also: $(\varphi,t) \longmapsto \vec r(\varphi,t) = \begin{pmatrix}3\cos\varphi\\3\sin\varphi+2\cos t\\2\sin t\end{pmatrix}$ $(0 \le \varphi, t \le 2\pi)$

5

φ–Linie zu t=1



φ-Linie zu t=-1

(a) $t=0: \vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$ Kreis mit Mittelpt. (0,0,0) und Radius 1 in der (x,y) - Ebene

$\sin^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)=1$

$t=1: \vec r(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi-\sin\varphi\\\sin\varphi+\cos\varphi\\1\end{pmatrix} \begin{matrix}=x\\=y\\=z \text{ konst.}\end{matrix}$ $\quad x^2+y^2 = \cos^2\varphi - \cancel{2\cos\varphi\sin\varphi} + \sin^2\varphi + \sin^2\varphi + \cancel{2\sin\varphi\cos\varphi} + \cos^2\varphi \overset{!}{=} 2$

Kreis mit Mittelpt. (0,0,1) und Radius $\sqrt2$ parallel zur (x,y)-Ebene

b) t-Linie: $\vec r(\varphi,t) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\1\end{pmatrix}$ t-Linien sind Geradenstücke (welche γ schneiden und von φ-Linie zu t=1 zu t=-1 verlaufen)

---

6 (a) $\begin{pmatrix}\cancel{-\frac12 R}\\0\\h/2\pi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{0}\\R\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-R\cdot h/2\pi\\0-0\\-\frac12 R\cdot R-0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\pi}Rh\\0\\-\frac12 R^2\end{pmatrix}}}$

$\begin{matrix}-\frac12 R & 0\\ 0 & R\end{matrix}$

(b) $\begin{pmatrix}\cancel{t_0R\cos\varphi_0}\\t_0R\sin\varphi_0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{-R\sin\varphi_0}\\R\cos\varphi_0\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_0R\sin\varphi_0\cdot h-0\\0-h\cdot t_0R\cos\varphi_0\\\underbrace{t_0R^2\cos^2\varphi_0+t_0R^2\sin^2\varphi_0}_{t_0R^2\underbrace{(\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0)}_{=1}}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}t_0R\sin\varphi_0\cdot h\\-t_0R\cos\varphi_0\cdot h\\t_0R^2\end{pmatrix}}}$

$\begin{matrix}t_0R\cos\varphi_0 & -R\sin\varphi_0\\ t_0R\sin\varphi_0 & R\cos\varphi_0\end{matrix}$

(c) $\vec s = \begin{pmatrix}-t\cdot\sin\varphi\\t\cdot\cos\varphi\\t\end{pmatrix}$, $\vec t = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\\varphi\end{pmatrix}$, $\vec s\times\vec t = \begin{pmatrix}\cancel{-t\cdot\sin\varphi}\\t\cdot\cos\varphi\\t\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{\cos\varphi}\\\sin\varphi\\\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\cos\varphi\cdot\varphi - t\sin\varphi\\t\cos\varphi + \varphi t\sin\varphi\\\underbrace{-t\sin^2\varphi - t\cos^2\varphi}_{-t(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}\varphi t\cos\varphi - t\sin\varphi\\\varphi t\sin\varphi + t\cos\varphi\\-t\end{pmatrix}}}$

$\begin{matrix}-t\cdot\sin\varphi & \cos\varphi\\ t\cdot\cos\varphi & \sin\varphi\end{matrix}$

(d) $\vec s = \begin{pmatrix}-2\sin\varphi\\0\\2\cos\varphi\end{pmatrix}$, $\vec t = \begin{pmatrix}0\\1\\2t\end{pmatrix}$, $\vec s\times\vec t = \begin{pmatrix}\cancel{-2\sin\varphi}\\0\\2\cos\varphi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{0}\\1\\2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2\cos\varphi\\0+2t\cdot2\sin\varphi\\-2\sin\varphi-0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\cos\varphi\\4t\sin\varphi\\-2\sin\varphi\end{pmatrix}}}$

$\begin{matrix}-2\sin\varphi & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$