Übungsserie 4

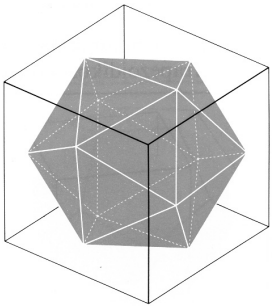
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 1. April 2011** in der Vorlesung

1. **Platonische Körper**

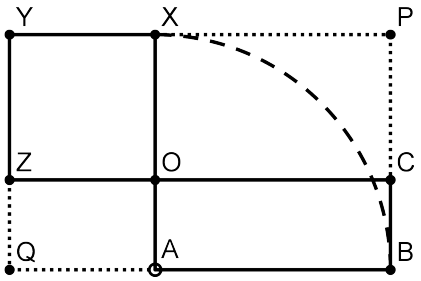
   (a) Welche Platonischen Körper erfüllen die Aussage: „Jede Ecke hat von jeder andern den gleichen Abstand“ und welche erfüllen „Sich gegenüberliegende Kanten sind parallel“?

   (b) Es gibt unendlich viele reguläre Vielecke aber nur fünf reguläre Polyeder, die jeweils aus lauter kongruenten, regulären Vielecken des gleichen Typs aufgebaut sind. Begründen Sie in Worten und durch Skizzen: „Es gibt unendlich viele Polyeder, die jeweils aus lauter kongruenten Quadraten und zwei kongruenten regulären Vielecken anderen Typs aufgebaut sind.“

   (c) Ein **Würfel**, ein reguläres **Tetra-**, **Okta-** und **Ikosaeder** stehen je ausbalanciert mit einer Kante auf dem Boden. (Figur 1 zeigt z. B. ein solches Ikosaeder.) Skizzieren Sie die vier Körper in der **Ansicht von oben** (d.h. in der Blickrichtung senkrecht zum Boden). (Achten Sie in Ihren Skizzen auf korrekte Winkel und Proportionen.)



Figur 1 (Aufgabe 1c)



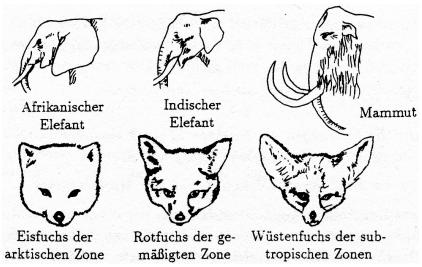
Figur 2 (Aufgabe 2)

2. In Figur 2 sind das Rechteck $OABC$ und das Quadrat $OXYZ$ flächengleich. Wie gross ist dann das Längenverhältnis von grosser Rechteckseite zu Quadratseite? Wie viele **Goldene Rechtecke** lassen sich mit den beschrifteten Punkten bilden? (Bitte alle aufzählen!)

3. Die Kantenmitten eines regulären **Tetraeders** bilden die Ecken eines regulären Oktaeders.
   (a) Skizzieren Sie Tetraeder und Oktaeder.
   (b) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Tetraedervolumen?
   (c) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächeninhalte?

4. **Skalenverhalten:**

Kleine Tiere haben eine relativ grosse Oberfläche und müssen deshalb relativ viel Nahrung zu sich nehmen, um ihre Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Grössere Tiere haben eine relativ kleine Körperoberfläche und können deshalb längere Zeit ohne Nahrung auskommen. Sie haben jedoch mehr Schwierigkeiten, die von ihnen beim Stoffwechsel produzierte Wärme abzuleiten. Die grossen Ohren des Afrikanischen Elefanten sind regelrechte Wärmeabstrahler, während die Ohren des Indischen Elefanten auffallend kleiner sind und jene des Mammuts besonders klein waren.



   (a) Ein freistehendes Bürogebäude mit Flachdach und rechteckigem Grundriss wird massstäblich von 10 000 m^3 Volumeninhalt auf 13 310 m^3 vergrössert. Um wie viel Prozent nimmt dadurch die Wärmeabstrahlung des Gebäudes zu? Annahme: Die Wärmeabstrahlung ist proportional zur Gebäudeoberfläche.

Bitte wenden!

Übungsserie 4

(b) Steigt ein Mensch aus dem Wasser, so haftet eine Wasserschicht von ca. 0.4 mm Dicke an seiner Haut. Um welchen Faktor muss man einen Mensch der Masse 60 kg und Oberfläche 150 dm^2 massstäblich verkleinern, sodass die Masse der Wasserschicht (wieder 0.4 mm dick) gleich gross ist, wie seine Körpermasse?
(Bei einer nassen Maus entspricht die Masse der Wasserschicht gerade ungefähr dem Körpergewicht der Maus, während sie bei einer Fliege ein Mehrfaches des Eigengewichts beträgt.)

5. Zeigen Sie mithilfe der **Eulerschen Polyederformel**: Ein konvexes Polyeder bestehend aus lauter Vierecken und bestehend aus lauter Ecken, in denen

   (a) stets drei Kanten zusammenstossen, ist vom Typ eines Würfels.

   (b) stets vier Kanten zusammenstossen, ist nicht möglich.

   (c) drei oder vier Kanten zusammenstossen hat stets genau 8 dreikantige Ecken. Skizzieren Sie einen solchen Körper. Tipp: Zwei aneinander gelegte Würfel 'verzerren'.

6. Figur 3 zeigt einen **Würfelstumpf**, welcher aus lauter regelmässigen Dreiecken und regelmässigen Vierecken der Seitenlänge $a = 1$ aufgebaut ist.

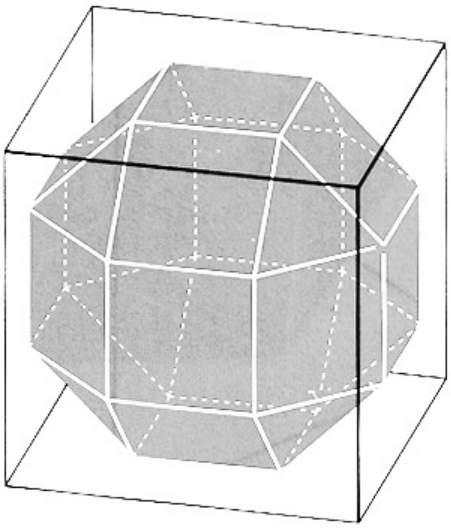
   (a) Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel für den Würfelstumpf.

   (b) Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Achten Sie auf korrekte Winkel & Streckenverhältnisse.) Wie gross ist die Kantenlänge w des umgebenden Würfels?

   (c) Der Würfelstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.

   (d) Jede Dreieckfläche bildet zusammen mit der nächstgelegenen Würfelecke ein Polyeder (dessen Körperhöhe (Formel im Skript!) auf der Raumdiagonalen des Würfels liegt). Was für eines? Ermitteln Sie den Abstand paralleler Dreieckflächen des Würfelstumpfs.

   (e) Werden die Dreieckflächen des Würfelstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen weiteren Körper, der den Würfelstumpf enthält. Welcher Körper ist das?



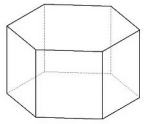
Figur 3 (Aufgabe 6)

Hearst Tower von Norman Foster, New York City

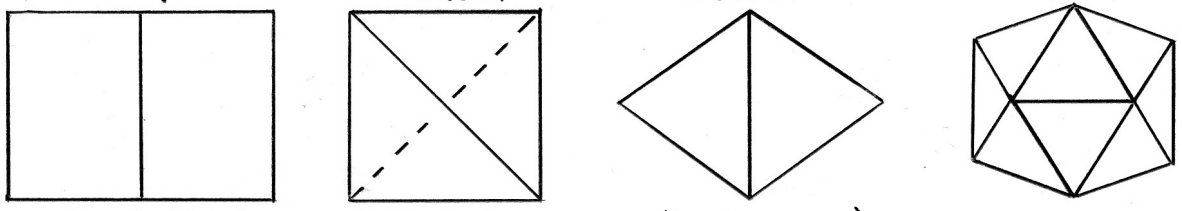
Übungsserie 4 FS 2011 Seite 1

1 (a) ... gleichen Abstand: Tetraeder, ... parallel: Würfel, Okta-, Dodeka-, Ikosaeder

(b) Es gibt unendlich viele Prismen mit quadratischen Seitenflächen: Deck- und Grundfläche bilden 2 kongruente, regelmässige n-Ecke, die senkrecht übereinander und parallel zueinander angeordnet sind. Der Abstand der beiden Flächen entspricht der Seitenlänge der n-Ecke.



(c)



2 Grosse Rechteckseite: a, Quadratseite: q

$$\underbrace{a(a-q)}_{\text{Rechteckfläche}} = \underbrace{q^2}_{\text{Quadratfläche}} \quad \leftrightarrow \quad a^2 - aq - q^2 = 0 \;/\!/\; :q^2$$

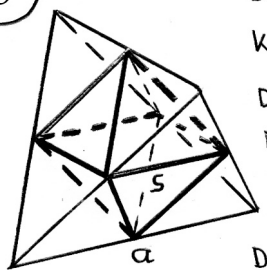
$$\left(\frac{a}{q}\right)^2 - \left(\frac{a}{q}\right) - 1 = 0$$

Setze: $x = \frac{a}{q}$: $\quad x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$

Verhältnis des Goldenen Schnitts!

4 Goldene Rechtecke: QAXY, QAOZ, QBPY, OCPX

3



Die Seitenkante s des Oktaeders ist eine massstäbliche Verkleinerung der Seitenkante a des Tetraeders: Längenfaktor $\lambda = \frac{1}{2}$

Das Oktaeder entsteht durch Abschneiden von 4 Eckpyramiden (Tetraeder). Diese Eckpyramiden sind massstäbliche Verkleinerungen des ursprüngl. Tetraeders mit Volumenfaktor: $\lambda^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. $V_{Okt} = V_{Tet} - 4 \cdot \left(\frac{1}{8} V_{Tet}\right) = \frac{1}{2} V_{Tet} \rightarrow \frac{V_{Okt}}{V_{Tet}} = \frac{1}{2}$

Das Oktaederseitendreieck ist eine massstäbl. Verkleinerung des Tetraederseitendreiecks mit Flächenfaktor: $\lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. $F_{Okt} = \underbrace{8}_{\text{8 Seitenflächen}} \cdot F_{\Delta Okt} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4} \underbrace{F_{\Delta Tet}}_{\frac{1}{4} \cdot F_{Tet}\ (4\ \text{Seitenfl.})}\right) = \frac{8}{16} F_{Tet} \rightarrow \frac{F_{Okt}}{F_{Tet}} = \frac{1}{2}$

4 (a) Volumen, Oberfläche: V_1, S_1 (kleines Gebäude); V_2, S_2 (grosses Gebäude)

λ Längenfaktor $\rightsquigarrow V_2 = \lambda^3 V_1$, $S_2 = \lambda^2 S_1$

$\lambda^3 = \frac{V_2}{V_1} = 1.331 = 1.1^3$, $\lambda^2 = \frac{S_2}{S_1} = 1.1^2 = 1.21$, $S_2 = 1.21\, S_1$

Die Gebäudeoberfläche und damit die Wärmeabstrahlung nimmt um 21% zu.

(b) Masse der Wasserschicht bei normaler Grösse: $\underbrace{0.4\,mm}_{0.004\,dm} \cdot 150\,dm^2 \cdot 1\,kg/dm^3 = 0.6\,kg$

Längenfaktor: λ
Oberflächenfaktor: λ^2
Massen/Volumenfaktor: λ^3

Wasserschicht:

$0.4\,mm \cdot \lambda^2 \cdot 150\,dm^2 \cdot 1\frac{kg}{dm^3} = \lambda^3 \cdot 60\,kg \;/\!/\; :\lambda^2$

$0.6\,kg = \lambda \cdot 60\,kg \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{100}$

Übungsserie 4 FS 2011 Seite 2

5 (a) $3e = 2K$, $4f = 2K$ $\quad 2 = e - k + f = e - \frac{3}{2}e + \frac{3}{4}e = \frac{1}{4}e$, $\underline{e = 8}$, $K = 12$, $f = 6$ Typ Würfel

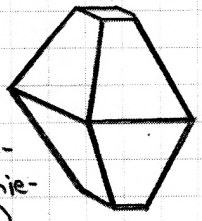
(b) $4e = 2K$, $4f = 2K$ $\quad 2 = e - k + f = e - 2e + e = 0$ unmöglich

(c) e_3, e_4 : Anzahl Ecken mit 3 bzw. 4 Kanten,

$e_3 + e_4 = e$, $3e_3 + 4e_4 = 2K$, $4f = 2K$

$2 = e - k + f = e_3 + e_4 - \frac{3}{2}e_3 - 2e_4 + \frac{3}{4}e_3 + e_4 = \frac{1}{4}e_3 \rightsquigarrow \underline{e_3 = 8}$

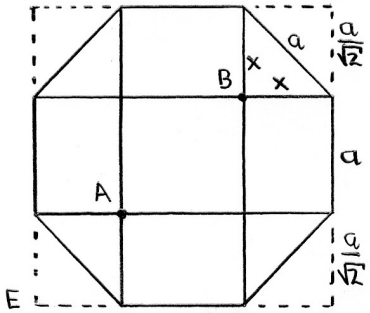
Bsp.: (ausbaubar, Würfel einschieben ...)



---

6 (a) Anzahl Ecken: $e = 24$, Anzahl Kanten: $K = 48$, Anzahl Flächen: $f = 26$ $\rightsquigarrow e - k + f = 2$ (stimmt)

(b)

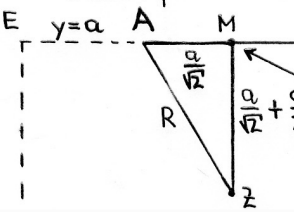


(Umriss: reg. 8-Eck)

$w = a + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a + \sqrt{2}\,a$

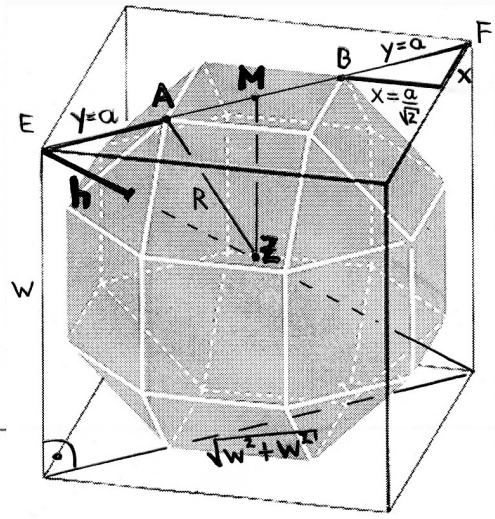
$x^2 + x^2 = a^2$, $x^2 = \frac{a^2}{2}$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(c)



$y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = a^2$

$|AM| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}$



$R^2 = |AM|^2 + |MZ|^2$

$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 2\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}$

$= \frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{\sqrt{2}}$

$R = a\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

(d) reg. Tetraeder (da $y = a$!)

mit Tetraederhöhe $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ (Skript S.61)

Abstand d = Würfelraumdiagonale $- 2h$

$d = \sqrt{w^2 + w^2 + w^2} - 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \sqrt{3}w - 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a =$

$= \sqrt{3}a + \sqrt{6}a - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

(e) reg. Oktaeder