Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 22. November 2013** in der Vorlesung

1. Gegeben sind die drei Punkte $A = (-5, 3, 3)$, $B = (1, 5, 8)$ und $C = (7, 11, 9)$.

   a) Berechnen Sie $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC}$, $\vec{v} = \vec{AB} \times \vec{BC}$, $\vec{w} = \vec{AC} \times \vec{BC}$

   b) Zeigen Sie, dass $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ und $\vec{u} \cdot \vec{AC} = 0$ gilt.

   c) Berechnen Sie die Längen der drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und interpretieren Sie das Ergebnis **geometrisch**.

2. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Raumkurve** γ beschrieben

$$\gamma :]-\infty, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 1.4\cos t \\ 0.7\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

   a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein räumliches Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P von γ mit der (x, y)-Ebene.

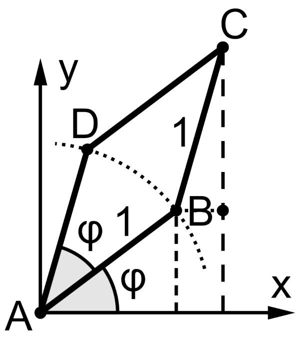
   b) Welchen Neigungswinkel bezüglich der (x, y)-Ebene hat die Kurve γ in P?

   c) Besitzt die Kurve γ, z. B. aufgefasst als Handlauf einer Treppe, überall die gleiche Steilheit? (Begründen Sie kurz Ihre Antwort.)

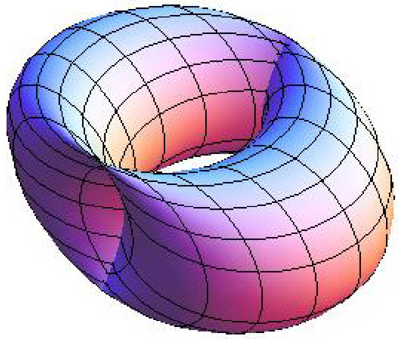
3. Ein **Gelenk-Rhombus** $ABCD$ mit der Seitenlänge 1 wird so um den Ursprung $O = A$ bewegt, dass der Punkt D doppelt so schnell ist wie der Punkt B (siehe Figur 1), d.h. $\sphericalangle(x\text{-Achse}, AB) = \sphericalangle(AB, AD) = \varphi$. Dabei bewegt sich der Punkt C um A herum.

   a) Skizzieren Sie mit Einheit 4cm die Positionen des mitbewegten Punktes C für die folgenden Winkel φ: 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180° und zeichnen Sie die Bahnkurve.

   b) Wie lautet eine Parameterdarstellung dieser Bahnkurve? (Es ist eine spezielle Epizykloide)



Figur 1 (Aufgabe 3)



Figur 2 (Aufgabe 4)

4. In dieser Aufgabe generieren Sie eine **Fläche** S durch Verschieben eines Kreises k entlang eines anderen Kreises c (Figur 2).

   a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung des **Kreises** k mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, der in der (x, y)-Ebene liegt und eine Parameterdarstellung des **Kreises** c mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 3, 0)$, der in der (y, z)-Ebene liegt.

   b) Der Kreis c wird nun so **verschoben**, dass sein Mittelpunkt stets auf k liegt und seine Kreisebene parallel zur (y, z)-Ebene bleibt; dabei überstreicht er eine Fläche S. Finden Sie eine Parameterdarstellung von S.

Übungsserie 2

5. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi - t\sin\varphi \\ \sin\varphi + t\cos\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -1 \le t \le 1)$$

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Kurve γ (φ-Linie zu $t = 0$). Leiten Sie ferner die Koordinatengleichung „ $x^2 + y^2 = \ldots$ “ der φ-Linie zu $t = 1$ her. Um was für Kurven handelt es sich je? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)

   b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien (insbesondere die t-Linie zu $\varphi = 0$). Was für Kurven sind die t-Linien?

6. **Vektorprodukttraining:** Berechnen Sie: (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} t_0 R\cos\varphi_0 \\ t_0 R\sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\varphi_0 \\ R\cos\varphi_0 \\ h \end{pmatrix}$

   Berechnen Sie ferner $\vec{s} \times \vec{t}$, wobei $\vec{s}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi, t)$ nach φ, und $\vec{t}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi, t)$ nach t bedeutet, für (c) $\vec{r}\,(\varphi, t) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix}$ und (d) $\vec{r}\,(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ t \\ t^2 + 2\sin\varphi \end{pmatrix}$

„Elliptische“ Wendeltreppe? Bildquelle:
http://de.wikipedia.org/wiki/Helix