ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Frühling 2006
Dozent
Dr. M. Leupp

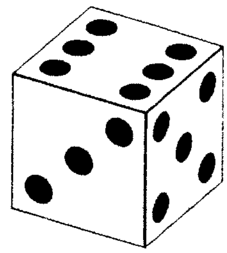
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!**

Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsnotizen, Übungsserien, elementarer Taschenrechner *Zeit: 3 Std.*

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Auf dem handelsüblichen **Spielwürfel** sind die Zahlen $1, \ldots, 6$ mithilfe von Augenmustern dargestellt. Ordnen Sie die sechs Augenmuster (ohne Berücksichtigung der quadratischen Würfelbegrenzungslinie) ihrer Symmetriegruppe $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ zu.

   (b) In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Verhältnis der Hypotenuse zur längeren Kathete gleich dem Verhältnis der längeren Kathete zur kürzeren. Wie gross ist dann das Verhältnis der Hypotenuse zur kürzeren Kathete? Um was für ein Verhältnis handelt es sich? (Tipp: Länge der kürzeren Kathete sei 1.)

   (c) Der Inhalt eines randvollen, kegelförmigen Kelches wird in ein **kegelförmiges Glas** mit doppeltem Fassungsvermögen umgeleert; dabei gehen $\frac{3}{4}$ der Flüssigkeit verloren. Bis zu welchem Bruchteil der Glashöhe steht die Flüssigkeit im Glas?

   (d) Ein **Kran** mit Ausleger der Länge L dreht sich in der Zeit T einmal um seine Achse. Gleichzeitig bewegt sich die Laufkatze vom äussersten Punkt des Auslegers mit der Geschwindigkeit v auf dem Ausleger zum Turm hin. Ferner wird der Lasthaken von der Laufkatze gleichmässig in der Zeit T vom Boden in die Höhe H gezogen. Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve, die der Lasthaken beschreibt.

2. [14P.] Durchdringen sich wie abgebildet zwei gleichartige, reguläre Tetraeder mit der Kantenlänge a, entsteht ein Sternkörper: Die **Stella Octangula** (Figur 1).
   (Die Kantenmitten des einen Tetraeders fallen mit jenen des anderen zusammen und werden als Ecken der Stella Octangula aufgefasst.)

   (a) Um was für einen speziellen Körper handelt es sich beim gemeinsamen Innenraum der beiden Tetraeder? (Genaue Bezeichnung und Kantenlänge angeben)
   (b) Was für einen speziellen Körper spannen die Spitzen der Stella Octangula auf? (Genaue Bezeichnung und Kantenlänge angeben) Welchen Volumeninhalt besitzt der Raum zwischen diesem Körper und der Stella Octangula?
   (c) Ermitteln Sie die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen der Stella Octangula und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.
   (d) Die Stella Octangula wird entlang der Körper-Diagonalen AD betrachtet. Skizzieren Sie den bei dieser Betrachtung wahrgenommenen Umriss des Körpers. (Seitenlänge(n) der Umrissfigur angeben)

3. [10P.] Die Menge der **Symmetrietransformationen** Symm(Ω) einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch Symm(Ω) $= \{I, U, V, W, X, Y\}$.

(a) Übertragen Sie die Tafel in Ihre Unterlagen und ergänzen Sie sie, sodass eine Gruppe entsteht.

$\circ$	I	U	V	W	X	Y
I						
U		V				
V			X			U
W				I		
X						W
Y			U		W	

(b) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω, welche diese Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie anschliessend geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie *eine* mögliche 'Lösung' für U, V, W, X, Y an.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gruppentafel alle Lösungen T (Symmetrietransformationen von Ω) der folgenden Gleichung: $V \circ T \circ T = I$

4. [6P.] Das **Dreieck** ABC (Figur 2) ist gleichschenklig und rechtwinklig und hat die Seitenmitten E, F und G.

Untersuchen Sie die **Verkettung** $T = R_{G,180^\circ} \circ R_{F,180^\circ} \circ R_{E,180^\circ}$ der drei Halbdrehungen $R_{E,180^\circ}$, $R_{F,180^\circ}$ und $R_{G,180^\circ}$. Anleitung: Begründen Sie die Anwendbarkeit von Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung) und bestimmen Sie damit den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder eines gewählten Punktes die entsprechende kennzeichnende Grösse.

5. [10P.] Der abgebildete gerade '**Ellipsenkegel**' entsteht, wenn man eine Gerade, die durch den Ursprung O (Kegelspitze) geht, an der Ellipse e entlangführt (Figur 3).

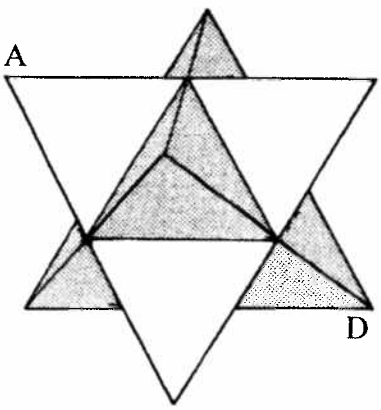
(a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Ellipse e, die parallel zur (x, y)-Ebene liegt, die Halbachsen $\sqrt{3}$ und 1 und den Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung dieser (Doppel-) Kegelfläche.

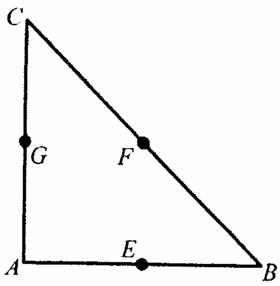
(c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche her.

(d) Ist diese Fläche abwickelbar? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

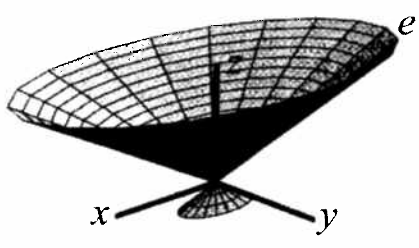
(e) Die winkelhalbierende Ebene der positiven x- und y-Achse schneidet den Ellipsenkegel in zwei Mantellinien. Welchen Winkel schliessen diese Mantellinien ein?



Figur 1 (Aufgabe 2)

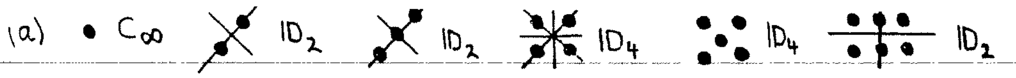


Figur 2 (Aufgabe 4)



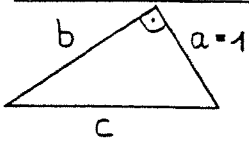
Figur 3 (Aufgabe 5)

① (a)



5P

(b)



$\frac{c}{b} = \frac{b}{\cancel{a}_{1}} \rightsquigarrow c = b^2$ ①

$\underbrace{a^2}_{=1} + b^2 = c^2 \rightsquigarrow 1 + b^2 = c^2$ ②

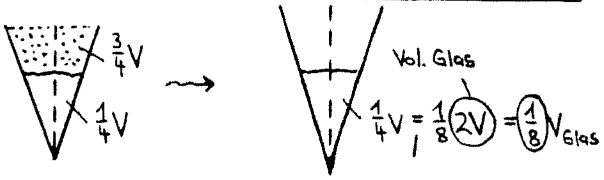
① in ②: $1 + c = c^2$

$c^2 - c - 1 = 0$

$c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{c}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Verhältnis des Goldenen Schnitts

5P

(c)



Volumenfaktor: $\frac{1}{8} = \lambda^3$

Längenfaktor: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Halbe Glashöhe

5P

(d) Koordinatensystem: z-Achse = Krandrehachse, Ursprung am Boden, Lasthaken zu Beginn ($t=0$) auf x-Achse

Radius zur Zeit t: $r(t) = L - vt$

Winkel bez x-Achse: $\varphi(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

Höhe über Boden: $z(t) = \frac{H}{T} \cdot t$

Parameterdrst. der Bahnkurve: $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (L - v\cdot t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ (L - vt)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \frac{H}{T}\cdot t \end{pmatrix}$

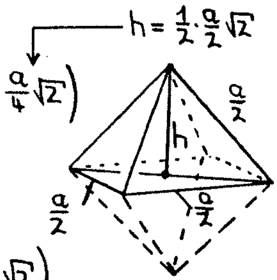
5P

② (a) 8 gleichseitige Dreiecke $\rightsquigarrow$ reguläres Oktaeder mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$

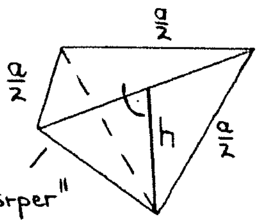
(b) 6 Quadrate $\rightarrow$ Würfel mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

$V_{zwischen} = V_{Würfel} - (2V_{Tetra} - V_{Okta}) = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}^{\text{Bsp 2.1 Skript}} - 2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)$

$= a^3\frac{\sqrt{2}}{4} - a^3\frac{\sqrt{2}}{6} + a^3\frac{\sqrt{2}}{24} = a^3\frac{\sqrt{2}}{8}$



oder:



"Auffüllkörper"

$h = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}$

$V_{zwischen} = 12V_{Auffüll} = 12\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}}_{h}\right)$

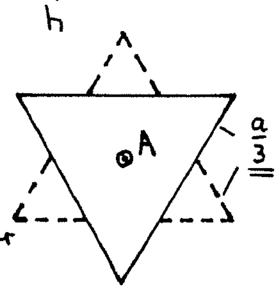
$= 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2}$

$= \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

(c) $e = 5+4+5 = 14$, $f = 8\cdot 3 = 24$, $K = 36$

$e - K + f = 14 - 36 + 24 = 2$ ✓

(d)



regelmässiger Sechszackiger Stern

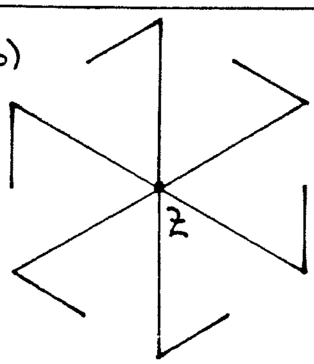
14P

③ a)

o	I	U	V	W	X	Y
I	I	U	V	W	X	Y
U	U	V	W ⑥	X ②	Y	I ⑤
V	V	W ⑥	X	Y ①	I	U
W	W	X ②	Y ①	I	U ④	V ③
X	X	Y	I	U ④	V	W
Y	Y	I ⑤	U	V ③	W	X

(Symm(Ω) hat 6 Elemente, ist Kommutativ $\rightsquigarrow \mathbb{C}_6$)

(b)



U V ... Y

$R_{Z,60°}$ $R_{Z,120°}$ ... $R_{Z,300°}$

(c) Gruppentafel: $V \circ X = I$ (eindeutig!) $\rightsquigarrow T \circ T = X$

Gruppentafel: $V \circ V = X$ oder $Y \circ Y = X \rightsquigarrow T = V$ oder $T = Y$

oder: $R_{z,120°} \circ R_{z,\alpha} \circ R_{z,\alpha} = R_{z,360°} \rightsquigarrow 120° + \alpha + \alpha = 360°$ od. $720°$

$\rightsquigarrow \alpha = 120° \; (\hat{=}\, V)$ od. $\alpha = 300° \; (\hat{=}\, Y)$ (10P)

---

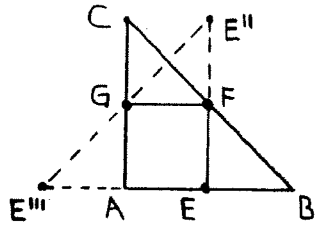
(4) A ist Fixpunkt von T ($A \xmapsto{R_E} B \xmapsto{R_F} C \xmapsto{R_G} A$)

(T ist Kongruenztransformation, da Verkettung von solchen)

T ist gleichsinnig (da Hintereinanderausführung von 3 Rotationen)

~~Nach Satz 2.9~~ ist T eine Rotation $R_{A,\alpha}$ um A oder die Identität

Wähle Punkt E: $E \xmapsto{R_E} E \xmapsto{R_F} E'' \xmapsto{R_G} E''' \rightsquigarrow \underline{\underline{T = R_{A,180°}}}$



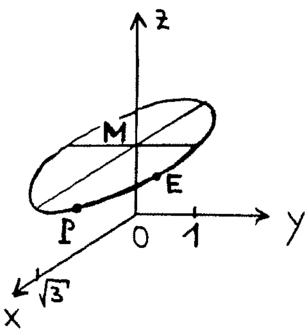
(6P)

---

(5) (a) Ellipse bez M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ 1 \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$

$e: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}}}$



(b) Gerade durch O und $(\sqrt{3}\cos t, \sin t, 1)$:

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\, s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \\ s \end{pmatrix}$

Kegelfläche: $(s,t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \sqrt{3}\, s \cos t \\ s \sin t \\ s \end{pmatrix}}}$ $\quad (-\infty < s < \infty,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$

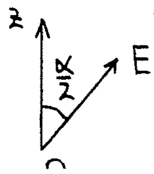
(c) $x = \sqrt{3}\, s \cdot \cos t,\ y = s \cdot \sin t,\ z = s$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = s^2 \cdot \cos^2 t + s^2 \cdot \sin^2 t = s^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = z^2 \rightsquigarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{3} + y^2 = z^2}}$$

(d) Ja, (verallgemeinerte) Kegelflächen sind abwickelbar (Satz 1.3)
(Fläche ist eine Regelfläche, die Tangentialebene längs jeder Schargeraden konstant)

(e) Punkt E auf e mit $x = y$: $\sqrt{3}\cos t = \sin t \rightsquigarrow t = \frac{\pi}{3}$ $\left(\sqrt{3} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t\right)$ t ist <u>nicht</u> der Drehwinkel!

$E = \left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ gleich! $\quad$ Kegelachse: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overrightarrow{OE} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\overrightarrow{OE}| \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{4}} \cdot 1} \approx 0.6325 \rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha = 101.537°}}$$

(10P)