Musterlösungen zu Serie 5

1. a) i) Es gilt $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1-i^2} = \dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{1}{2}$.

ii) Es gilt $\dfrac{3+4i}{2-i} = \dfrac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+11i}{4+1} = \dfrac{2}{5} + i\,\dfrac{11}{5}$.

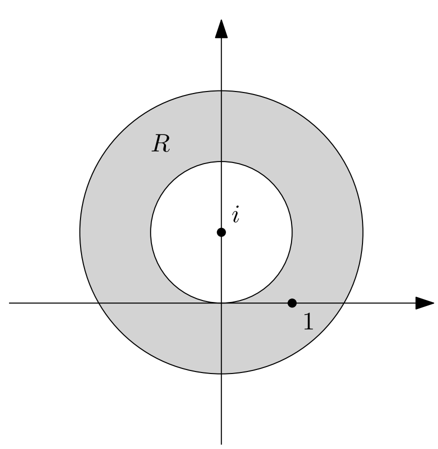
iii) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

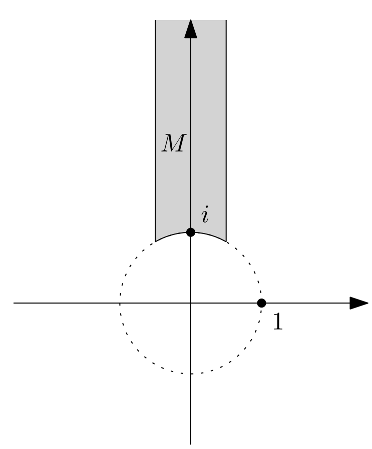
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^k = \left(\frac{2i}{2}\right)^k$$
$$= i^k = \begin{cases} (-1)^l, & k = 2l, \quad l \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^l i, & k = 2l+1, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Also ist $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2012} = (-1)^{1006} = 1$.

iv) Aus $\sqrt{i} = a + ib$ folgt $i = a^2 + 2abi - b^2$, also müssen $a^2 = b^2$ und $ab = 1/2$ gelten. Die beiden Quadratwurzeln von i sind also $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Die beiden Mengen sehen wie folgt aus:





2. a) i) Es gilt $z = \dfrac{i\sqrt{3}-1}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2+i2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und also $|z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$ sowie $\arg(z) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, d.h. $z = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

ii) Es gelten $|i\bar{z}| = |i||z| = |z| = 2$ und $\mathrm{Re}(i\bar{z}) = -\mathrm{Im}(\bar{z}) = \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$ und also $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ oder $\arg(z) = \dfrac{2\,\pi}{3}$, d.h. $z = 2\,e^{\frac{\pi i}{3}}$ oder $z = 2\,e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

iii) Mit der Substitution $w = \dfrac{z-2}{2}$ erhalten wir

$$w^3 = 1, \qquad \text{also} \qquad w \in \left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}$$

und damit

$$\begin{aligned}
z = z_1 &= 4 && \text{oder}\\
z = z_2 &= 2 + 2\,e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= 2 - 1 + i\,\sqrt{3} = 1 + i\,\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{\frac{\pi i}{3}} && \text{oder}\\
z = z_3 &= 2 + 2\,e^{\frac{4\pi i}{3}} = 2 + 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\
&= 2 - 1 - i\,\sqrt{3} = 1 - i\,\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\,e^{\frac{5\pi i}{3}}.
\end{aligned}$$

iv) Mit der Substitution $w = z^2$ erhalten wir

$$w^2 + 4w + 16 = 0, \qquad \text{also} \qquad w = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2} = -2 \pm i\,2\,\sqrt{3}$$

und damit $|w| = \sqrt{4+12} = 4$ und $\arg(w) = \pi \mp \arctan\sqrt{3} = \pi \mp \dfrac{\pi}{3}$.

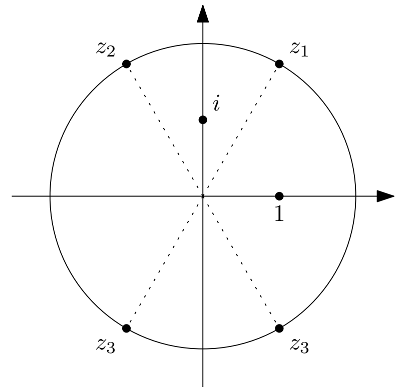
Siehe nächstes Blatt!

Da schliesslich $z = \pm w^{\frac{1}{2}}$, gilt die Gleichung sowohl für die Zahlen

$$z_1 = 2\,e^{\frac{\pi i}{3}},$$
$$z_2 = 2\,e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

als auch für die Zahlen

$$z_3 = -2\,e^{\frac{\pi i}{3}} = 2\,e^{\frac{4\pi i}{3}} \quad \text{und}$$
$$z_4 = -2\,e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2\,e^{\frac{5\pi i}{3}}.$$



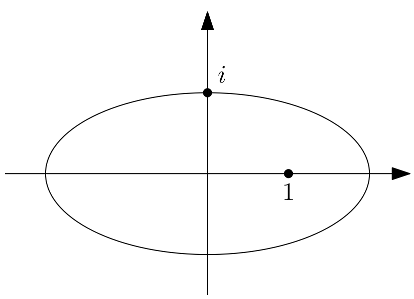
b) Es gelten

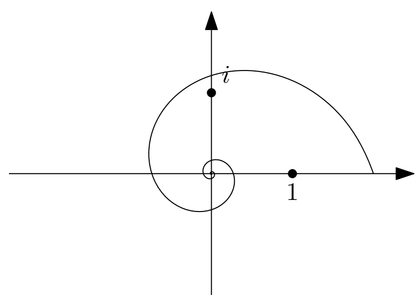
$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{3}{2}\,(\cos(\pi t) + i\sin(\pi t)) + \frac{1}{2}\,(\cos(\pi t) - i\sin(\pi t))\\ &= 2\,\cos(\pi t) + i\sin(\pi t),\end{aligned}$$

d.h. α parametrisiert eine Ellipse mit den Halbachsen 4 und 2, sowie

$$\beta(t) = 2\,e^{-t}\,(\cos(\pi t) + i\sin(\pi t)) = 2\,e^{-t}\cos(\pi t) + i\,2e^{-t}\sin(\pi t),$$

d.h. β parametrisiert eine logarithmische Spirale. Die Spuren sehen wie folgt aus:





Bitte wenden!

3. **a)** Da die Koeffizienten von P reell sind, gilt $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Gilt also

$$P(z) = 0, \qquad \text{so folgt} \qquad P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0.$$

b) Nach Voraussetzung gelten

$$\begin{aligned} 6 = P(1) &= a + b + c + d \\ -2 = P(-1) &= -a + b - c + d \\ -2 - 2i = P(i) &= -ai - b + ci + d \qquad\qquad \text{und} \\ -2 + 2i = \overline{P(i)} = P(\bar{i}) = P(-i) &= ai - b - ci + d. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen an die Koeffizienten des Polynoms bilden ein lineares Gleichungssystem,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -i & -1 & i & 1 & -2-2i \\ i & -1 & -i & 1 & -2+2i \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Dann kann man direkt ablesen, dass $d = 0,\ c = 1,\ b = 2$ und $a = 3$.

4. **a)** Fact: Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist. Für A verwenden wir die Formel zur Berechnung der Determinante für (2×2)-Matrizen.

$$\det A = (3 - i)\,(-3 + i) - (-2) \cdot 4 = 6i.$$

Also ist die Matrix A intvertierbar.

Für B wenden wir die Laplacesche Entwicklung nach der letzten Spalte an

$$\begin{aligned} \det B &= 0 + 0 + (-1)^{3+3}\,(3 + 4i) \det \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 + 2i & 2 - i \end{pmatrix} \\ &= (3 + 4i)\,(i\,(2 - i) - (1 + 2i) \cdot 1) \\ &= (3 + 4i)\,(2i + 1 - 1 - 2i) = 0. \end{aligned}$$

Also ist auch B nicht invertierbar.

b) Wir verwenden den Gauss-Algorithmus zur Berechnung der Inversen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & 1 & 0 \\ -i & 1+i & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II+iI}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & 1 & 0 \\ 0 & -1+i & i & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II\cdot\frac{1}{-1+i}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{-(1+i)}{2} \end{array}\right) \overset{I-2iII}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -i & i-1 \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{array}\right)$$

Das heisst $C^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i - 1 \\ \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}.$

Siehe nächstes Blatt!

5. Das charakteristische Polynom von R_α

$$p_{R_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$$

hat die Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$$
$$= \cos\alpha \pm i\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$$

Daher hat R_α

- den doppelten Eigenwert 1 für $\alpha = 0$,
- den doppelten Eigenwert -1 für $\alpha = \pi$ und
- sonst das konjugierte Paar $e^{\pm i\alpha}$ komplexer Eigenwerte.

In den ersten beiden Fällen ist offenbar jeder von $\vec{0}$ verschiedene Vektor in der Ebene ein Eigenvektor. Das sieht man auch leicht geometrisch ein, denn da $\vec{x} \mapsto R_\alpha\vec{x}$ allgemein eine Drehung in der Ebene um den Winkel α beschreibt, ist insbesondere R_0 die Identität und R_π die Punktspiegelung am Koordinatenursprung.

Für die übrigen Winkel erhält man

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - e^{i\alpha} & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - e^{i\alpha} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - e^{-i\alpha} & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & i\sin\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

und damit die (komplexen) Eigenvektoren $\mu\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ bzw. $\mu\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\mu \in \mathbb{C}$.

Das charakteristische Polynom von S_α

$$p_{s_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)\,(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha$$
$$= (\lambda - \cos\alpha)\,(\lambda + \cos\alpha) - \sin^2\alpha = \lambda^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1$$

hat für alle α die Wurzeln $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Wegen

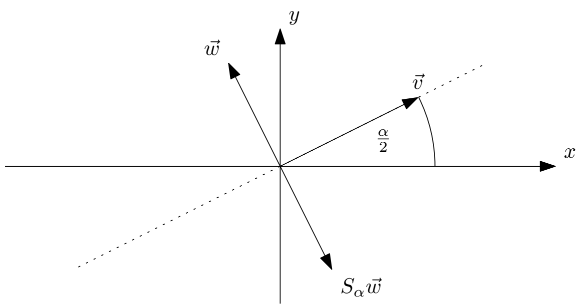
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

sind die Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_2 von der Form

$$\mu \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mu \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Dies sieht man auch ohne Rechnung leicht geometrisch ein: die Abbildung $\vec{x} \mapsto S_\alpha \vec{x}$ beschreibt eine Spiegelung in der Ebene, wobei die Spiegelungsachse mit der x-Achse den Winkel $\alpha/2$ einschliesst. Offenbar bleiben genau die Ortsvektoren auf dieser Achse bei der Spiegelung unverändert während genau die Orstvektoren am Koordinatenursprung gespiegelt werden, die auf der dazu orthogonalen Geraden liegen.



$$\vec{v} = |\vec{v}| \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = |\vec{w}| \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_\alpha \vec{w} = |\vec{w}| \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = -\vec{w}$$