Musterlösungen zu Serie 7

1. Für jede der vier trigonometrischen Funktionen gilt: Genau in den Nullstellen x_k ist $y''(x_k) = 0$ und $y'''(x_k) \neq 0$, was bedeutet, dass Nullstellen und Wendepunkte übereinstimmen.

a) Sinusfunktion
Sinus hat Nullstellen $N_k = \pi \cdot k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da

$$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x) \text{ und } \sin'''(N_k) = -\cos(N_k) = (-1)^{k+1} \neq 0$$

(wie oben erwähnt) sind das auch gleich die Wendestellen. Die Steigung in den Wendepunkten ist

$$\sin'(N_k) = \cos(N_k) = \cos(\pi \cdot k) = (-1)^k.$$

Das heisst die Steigung der Wendetangenten ist abwechselnd 1 und -1 (beginnend bei $k = 0$):

b) Kosinusfunktion
Kosinus hat Nullstellen $N_k = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da

$$\cos''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x) \text{ und } \cos'''(N_k) = \sin(N_k) = (-1)^k \neq 0$$

gilt wieder, dass diese auch gleich den Wendestellen entsprechen. Die Steigung in den Wendepunkten ist

$$\cos'(N_k) = -\sin(N_k) = (-1)^{k+1},$$

also abwechselnd -1 und 1.

c) Tangensfunktion
Auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ hat Tangens nur eine Nullstelle bei $x = 0$. Da

$$\tan''(x) = \left(1 + \tan^2(x)\right)' = 2\tan(x)\left(1 + \tan^2(x)\right) \text{ und } \tan'''(0) = 2 \neq 0,$$

ist diese auch gleich die Wendestelle. Die Steigung der Wendetangente ist

$$\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1.$$

d) Kotangensfunktion

Auf dem Intervall $(0,\pi)$ hat Kotangens nur die Nullstelle bei $N=\frac{\pi}{2}$. Da

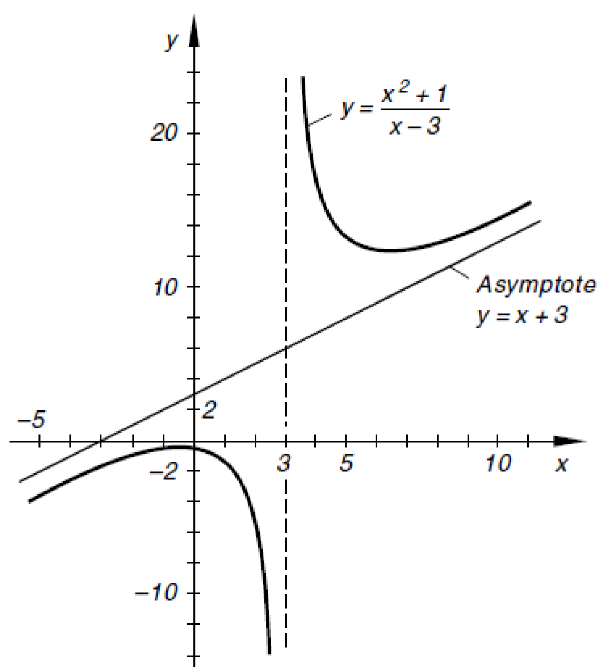
$$\cot''(x) = \left(-1-\cot^2(x)\right)' = -2\cot(x)\,(-1-\cot(x))^2$$

$$\text{und } \cot'''(\frac{\pi}{2}) = -2 \neq 0$$

ist dies gleich der Wendestelle. Die Steigung im Wendepunkt ist

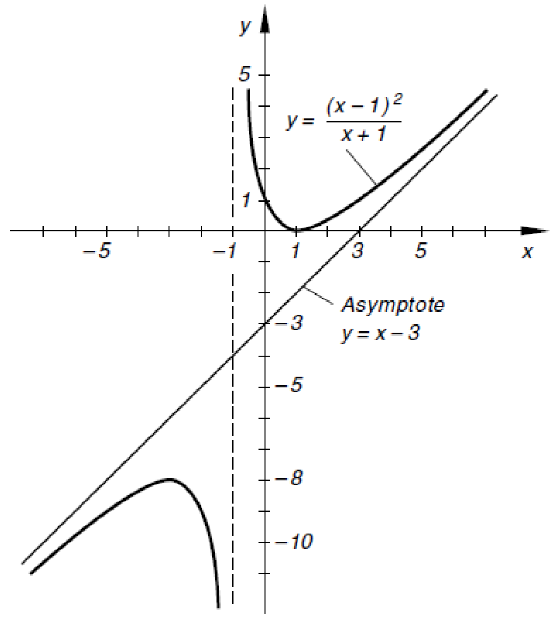
$$\cot'(\frac{\pi}{2}) = -1-\cot^2(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

2. a) *Definitionsbereich*: D= $\mathbb{R}\setminus\{3\}$
Pol: $x=3$ (Pol mit Vorzeichenwechsel)
Senkrechte Asymptote: $x=3$
Extremwerte: Rel. Maximum in $(-0.162,-0.325)$; Rel. Minimum in $(6.162, 12.325)$
Asymptote im Unendlichen: $y=x+3$
Wertebereich: W= $(-\infty,-0.325]\cup[12.325,+\infty)$

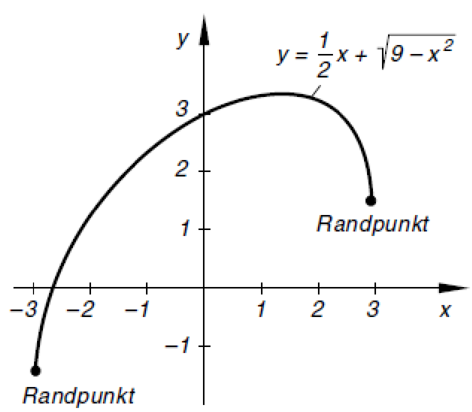


Siehe nächstes Blatt!

b) *Definitionsbereich*: D$= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Nullstellen: $x_N = 1$ (doppelte Nullstelle, d.h. Berührungspunkt und Extremwert)
Pol: $x = -1$ (Pol mit Vorzeichenwechsel)
Senkrechte Asymptote: $x = -1$
Extremwerte: Rel. Maximum in $(-3, -8)$; Rel. Minimum in $(1, 0)$
Asymptote im Unendlichen: $y = x - 3$
Wertebereich: W$= (-\infty, -8] \cup [0, +\infty)$

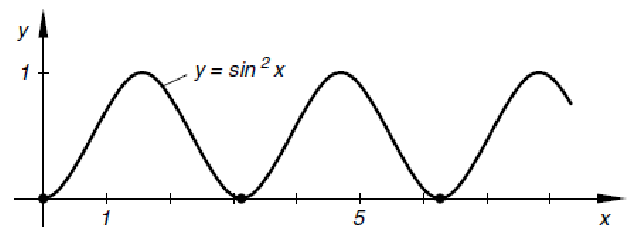


c) *Definitionsbereich*: D$= [-3, 3]$
Nullstelle: $x_N = -2.683$
Extremwert: Rel Maximum in $(1.342, 3.354)$
Wertebereich: W$= [-1.5, 3.354]$

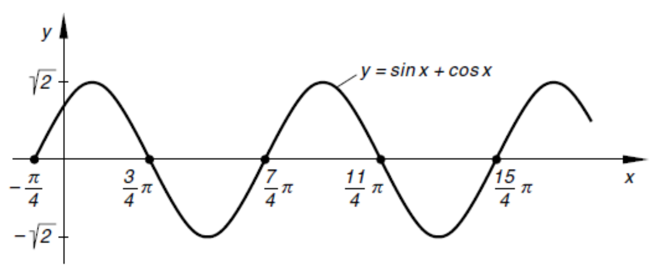


Bitte wenden!

d) *Definitionsbereich*: D= $(-\infty, +\infty)$
Periode: p= π
Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$
Extremwerte: Rel. Maxima bei $(x_k, y_k) = \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, 1\right) \;\; (k \in \mathbb{Z})$
Die rel. Minima fallen mit den Nullstellen zusammen.
Wendepunkte: $(x_k, y_k) = \left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, 0.5\right) \;\; (k \in \mathbb{Z})$
Wertebereich: W= $[0, 1]$



e) *Definitionsbereich*: D= $\mathbb{R}$
Periode: 2π
Nullstellen: $x_k = k\pi - \frac{\pi}{4} \;\; (k \in \mathbb{Z})$
Extremwerte: $(x_k, y_k) = \left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi, (-1)^k \sqrt{2}\right) \;\; (k \in \mathbb{Z})$ wobei es sich für k ungerade um rel. Minima und k gerade um rel. Maxima handelt.
Wertebereich: W= $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$



Bemerken Sie, dass

$$y = \sin(x) + \cos(x) = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

die Superposition zweier gleichfrequenten Schwingungen und deshalb eine Schwingung der gleichen Frequenz ist

$$y = A \sin(x + \varphi).$$

Wir können die Amplitude A und Phasenverschiebung φ wie folgt ermitteln: Die Amplitude ist die maximale Auslenkung, das heisst der Funktionswert wo $y'(x) = 0$

$$y'(x) = \cos(x) - \sin(x) = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

dann ist $x = \frac{\pi}{4}$ und somit

$$A = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Der Startwinkel ist dort, wo sich der Wendepunkt (um 0) mit positiver Steigung befindet. Da Nullstellen mit Wendepunkten übereinstimmen ist dies dort, wo $y(x) = 0$, also bei $x = -\frac{\pi}{4}$ oder $x = \frac{3\pi}{4}$. Doch

$$y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ und } y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Also ist der Startwinkel bei $x = -\frac{\pi}{4}$. Somit erhalten wir

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Alternativ könnten wir die Diskussion in Papulas Band 1, S. 258-270 insbesondere die Formeln III-152 und III-153 (S. 267) verwenden:
Man verwende das Zeigerdiagramm und die Formeln für Superpostition,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)}{A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)},$$

wobei $y = A\sin(x + \varphi) = A_1\sin(x + \varphi_1) + A_2\sin(x + \varphi_2)$. Dann ist

$$A = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

und

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(0)}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Also ist $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Das heisst, es handelt sich um eine um $\frac{\pi}{4}$ nach *links* verschobene Sinuskurve mit der Amplitude $A = \sqrt{2}$ und der Periode $p = 2\pi$.
Bmk: Aus der trigonometrischen Formel

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und aus

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

folgt, dass

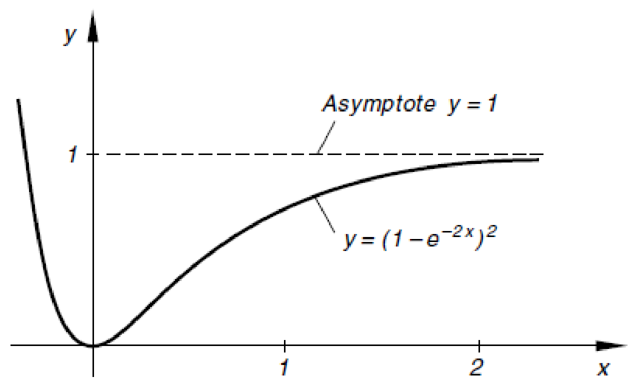
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x).$$

Bitte wenden!

f) *Definitionsbereich*: D= $(-\infty, +\infty)$
Nullstelle: $x_N = 0$
Extremwert: Rel Minimum in $(0, 0)$
Wendepunkt: $(0.347, 0.25)$
Verhalten der Funktion im Unendlichen:

$$\begin{aligned} &\text{Für } x \to -\infty \text{ folgt, } y \to +\infty, \\ &\text{Für } x \to +\infty \text{ folgt, } y \to 1, \text{ d.h. } y = 1 \text{ ist Asymptote} \end{aligned}$$

Wertebereich: W= $[0, +\infty)$



3. Aus den Eigenschaften

$$y(0) = 0, \; y(1) = -2, \; y'(1) = 2 \text{ und } y''(1) = 0$$

erhält man vier Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten. Zur Erinnerung, das gibt ein lineares Gleichungssystem und der Gaussalgorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Daraus kann man die Werte der Koeffizienten direkt bestimmen und erhält die Funktion

$$y(x) = -4x^3 + 12x^2 - 10x.$$

Siehe nächstes Blatt!

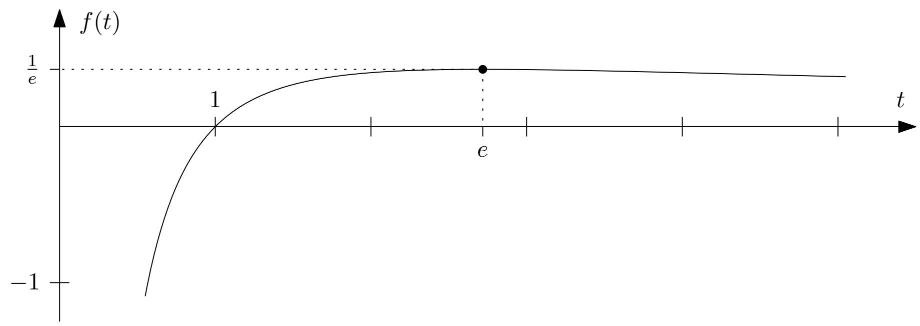
4. a) Es gilt

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t}\,t - \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}.$$

Die Funktion f ist also auf dem Intervall $(0,e]$ streng monoton wachsend, auf dem Intervall $[e,\infty)$ streng monoton fallend und nimmt somit ihr Maximum $\frac{1}{e}$ an der Stelle $t=e$ (und nur dort) an. Ferner gelten

$$\lim_{t\to 0} f(t) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Die Funktion hat also nach dem Zwischenwertsatz (aufgrund ihres Monotonieverhaltens) den Wertebereich $(-\infty, 1/e]$ und nimmt jeden Wert in $(-\infty, 0]$ genau einmal, jeden Wert im Intervall $(0, 1/e)$ genau zweimal an.



b) Mit der Substitution $x = e^t$, $t \in (0,\infty)$, ist $\ln x = x^\alpha$ äquivalent zu $t = e^{\alpha t}$ bzw. zur Gleichung $\ln t = \alpha t$ oder $f(t) = \alpha$. Nach **a)** hat die Gleichung

- genau eine Lösung für $\alpha \in (-\infty, 0]$,
- genau zwei Lösungen für $\alpha \in (0, 1/e)$,
- genau eine Lösung für $\alpha = 1/e$ und
- keine Lösung für $\alpha > 1/e$.

c) Die Ungleichung $s^t < t^s$ bzw. $s^t > t^s$ ist für $s,t \in (0,\infty)$ äquivalent zur Ungleichung $f(s) < f(t)$ bzw. $f(s) > f(t)$. Mit **a)** ergibt sich daraus:

i) $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, da $\sqrt{2} < \sqrt{3} < e$,	ii) $\sqrt{e}^{\sqrt{\pi}} < \sqrt{\pi}^{\sqrt{e}}$, da $\sqrt{e} < \sqrt{\pi} < e$,
iii) $(2.71)^e < e^{2.71}$, da $2.71 < e$,	iv) $e^{2.72} > (2.72)^e$, da $2.72 > e$,
v) $e^\pi > \pi^e$, da $\pi > e$,	vi) $99^{100} > 100^{99}$, da $100 > 99 > e$.

d) Die Gleichung ist äquivalent zu $f(n) = f(m)$, daher muss $1 < n < e < m$ gelten und es kommt nur $n = 2$ in Frage. Wegen $2^4 = 4^2$ gibt es also ein und nur ein Paar natrürlicher Zahlen (m,n), $n < m$, für die $n^m = m^n$ gilt.

Bitte wenden!

5. **a)** Vgl. Papula Bd. 1 III 4.4.

b) Eine Lösung dieser Gleichung im angegebenen Intervall zu finden ist offenbar gleichbedeutend damit, eine Nullstelle der reellen Funktion

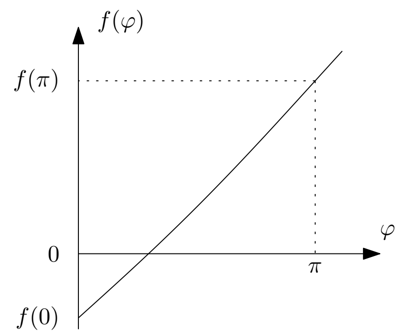
$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(\varphi) = \varphi - \frac{\sin\varphi}{10} - \frac{17}{20},$$

zu finden. Aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es aber wegen

$$f(0) = -\frac{17}{20} < 0 \qquad \text{und} \qquad f(\pi) = \pi - \frac{17}{20} > 0$$

ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit $f(\varphi) = 0$.

Bemerkung: Man sieht leicht ein, dass die Funktion f streng monoton wächst. Daher hat die Funktion sogar genau eine Nullstelle im angegebenen Intervall.



c) Wählen wir eine geeignete Längeneinheit, so dass der Grosskreis die Länge 1 hat, so lässt sich der Temperaturverlauf durch eine Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \quad f(0) = f(1) \tag{†}$$

beschreiben.

Wir wollen also zeigen, dass es für jede Funktion der Form (†) ein $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ gibt, so dass $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Wegen

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g\left(\frac{1}{2}\right)$$

gilt entweder

- $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, also $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, oder
- $g(0) < 0$ und also $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ oder
- $g(0) > 0$ und also $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

Im ersten Fall ist $x_0 = 0$ die gesuchte Nullstelle, anderenfalls garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Angenommen, eine Funktion f der Form (†) nähme jeden ihrer Werte genau zwei Mal an, so gälte dies insbesondere für ihr Minimum und ihr Maximum.

Nähme sie ihr Maximum M in den Punkten $x_1 > 0$ und $x_2 \in (x_1, 1)$ an, so nähme sie nach dem Zwischenwertsatz auf jedem der Intervalle

$$[0, x_1], \quad [x_1, x_m], \quad [x_m, x_2], \qquad \text{mit} \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

jeden Wert zwischen $\max\{f(0), f(x_m)\}$ und M an.

Lägen die Maxima auf den Randpunkten, so gälte dasselbe Argument für $-f$.