Dr. Ana Cannas

Musterlösungen zu Serie 8

1. Zum Newtonschen Verfahren (vgl. Papula Bd. 1 IV 3.7):

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle $\xi \in [a, b]$. Ändern sich die Vorzeichen der Ableitungen f' und f'' nicht, so lässt sich diese Nullstelle mit der Rekursion

$$x_0 \in [a, b] \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

annähern, falls die Iterationswerte zu $x_0 = a$ und $x_0 = b$ in $[a, b]$ liegen.

Sind dabei m das Minimum von $|f'|$ und M das Maximum von $|f''|$ auf $[a, b]$, so besteht die Fehlerabschätzung $|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_{n+1} - x_n|^2$, $n \geq 0$.

a) Für $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5$, ergibt sich die Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right).$$

Da $|f'(x)| = 2|x| \geq 4$ und $|f''(x)| = 4$, gilt die Fehlerabschätzung

$$\varepsilon_{n+1} = \left|x_{n+1} - \sqrt{5}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_{n+1} - x_n\right|^2$$

Für den Startwert $x_0 = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_0 &= 3 && \\
x_1 &= \frac{7}{3} && \varepsilon_1 \leq \frac{2}{9} \\
x_2 &= \frac{47}{21} && \varepsilon_2 \leq \frac{2}{21^2} \leq 4.6 \times 10^{-3} \\
x_3 &= \frac{2207}{987} && \varepsilon_3 \leq \frac{2}{987^2} \leq 2.1 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$ lässt sich allgemein durch die rekursiv definierte Folge

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \geq 0,$$

Bitte wenden!

mit $|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \left|x_n - \sqrt{a}\right|^2$ approximieren. Die Rekursionsformel folgt wie in **a)**, indem man das Newtonsche Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^2 - a$ anwendet. Diese Methode war in Mesopotamien bereits im 18. Jahrhundert v.Chr. bekannt und heisst daher auch *babylonisches Wurzelziehen*.

b) Für $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 0.1 \sin x - 0.85$, ergibt sich die Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 0.1 \sin x_n - 0.85}{1 - 0.1 \cos x_n}.$$

Da

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |1 - 0.1 \cos x| \geq 0.9 \qquad \text{und} \\ |f''(x)| &= |0.1 \sin x| \leq 0.1 \end{aligned}$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - \xi| \leq \frac{1}{18} \left|x_{n+1} - x_n\right|^2.$$

Für den Startwert $x_0 = \pi$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x_0 &= 3.141592\ldots \\ x_1 &= 1.058326\ldots \qquad & \varepsilon_1 &\leq 2.5 \times 10^{-1} \\ x_2 &= 0.930905\ldots \qquad & \varepsilon_2 &\leq 9.1 \times 10^{-4} \\ x_3 &= 0.930172\ldots \qquad & \varepsilon_3 &\leq 3 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion, $n \in \mathbb{N}^*$, so ist das *Taylorpolynom* n-ter Ordung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ gegeben durch

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (1)$$

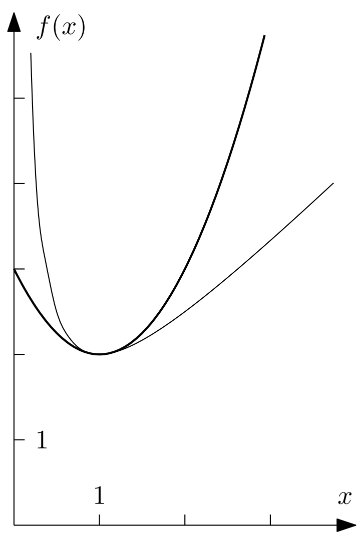
Im Spezialfall $x_0 = 0$ spricht man auch vom *Maclaurinschen Polynom* n-ter Ordung.

Wie in der Vorlesung besprochen, verallgemeinert das Taylorpolynom n-ter Ordung für $n \geq 2$ die lineare Näherung $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ zu einer polynomialen Approximation der Funktion f in der Nähe von x_0 (vgl. auch Papula Bd. 1 VI 3).

a) In den folgenden Abbildungen ist der Graph des Taylorpolynoms (1) jeweils gegenüber dem Funktionsgraphen hervorgehoben.

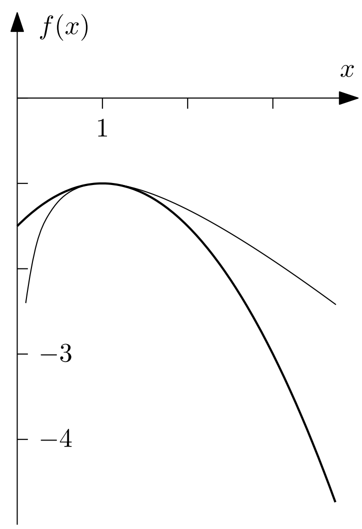
i) Das Taylorpolynom ist

$$2 + (x - 1)^2.$$



ii) Das Taylorpolynom ist

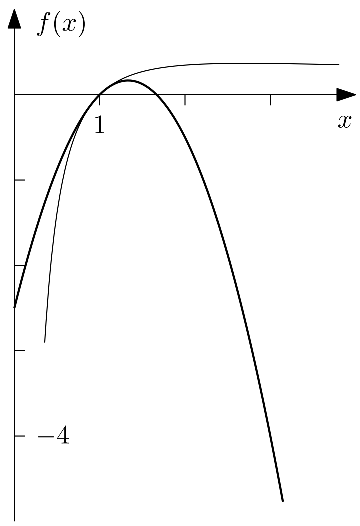
$$-1 - \frac{(x - 1)^2}{2}.$$



Bitte wenden!

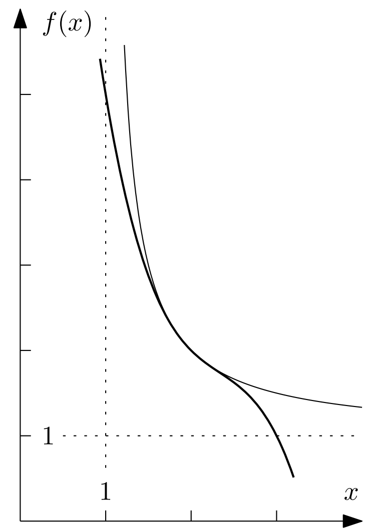
iii) Das Taylorpolynom ist

$$(x-1)-\frac{3(x-1)^2}{2}.$$



iv) Das Taylorpolynom ist

$$2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3.$$



b) Für $f(x)=\tan x$ gilt

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad f''(x)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x} \qquad \text{und} \qquad f'''(x)=\frac{4\tan^2 x}{cos^2x}+\frac{2}{\cos^4 x},$$

das Maclaurinsche Polynom dritter Ordnung ist also

$$0+1\,x+\frac{0}{2}\,x^2+\frac{2}{6}\,x^3=x+\frac{x^3}{3}.$$

Mit dem Ansatz $a+bx+cx^2+dx^3$ folgt aus $\sin x=\tan x\cos x$

$$\begin{aligned} x-\frac{x^3}{6}+\cdots &= \left(a+bx+cx^2+dx^3\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right) \\ &= a+bx+cx^2+dx^3-\frac{ax^2+bx^3}{2}+\cdots \\ &= a+bx+\left(c-\frac{a}{2}\right)x^2+\left(d-\frac{b}{2}\right)x^3+\cdots \end{aligned}$$

$a=c=0$, $b=1$ und $d=\frac{1}{3}$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $n \in \mathbb{N}^*$, auf dem Intervall I mit $0 \in I$, so besitzt f dort die Darstellung

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x) \qquad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{2}$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$, wobei f_n das Maclaurinsche Polynom n-ter Ordung (1) (mit $x_0 = 0$) bezeichnet (vgl. die Ausführungen dazu in Papula Bd. 1 VI 3.3).

Insbesondere besteht also die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\max_{\vartheta\in[0,1]} |f^{(n+1)}(\vartheta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \qquad \text{für alle } x \in I.$$

a) **i)** Die Maclaurinsche Reihe der Exponentialfunktion ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Für das Restglied gilt $R_n(x) = \frac{e^{\vartheta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$, also

$$\left| R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^{\frac{\vartheta}{2}}}{(n+1)!} \left|\frac{1}{2}\right|^{n+1} \leq \frac{\sqrt{e}/2}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2^n (n+1)!},$$

da $\vartheta \in (0,1)$ und $\sqrt{e} < 2$. Wegen $100 < 2^3 4! = 192$ ist also

$$\begin{aligned}\sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \approx 1.65.\end{aligned}$$

ii) Für das Restglied gilt

$$\left| R_n\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{e^{-\frac{\vartheta}{4}}}{(n+1)!} \left|\frac{1}{4}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!}.$$

Wegen $100 < 4^3 3! = 384$ ist also

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \approx 0.78.$$

iii) Die Maclaurinsche Reihe der Kosinusfunktion ist

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

Bitte wenden!

Für das Restglied gilt

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\cos(\vartheta x)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \text{also ist}$$

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| \leq \frac{1}{5^{2n+2}(2n+2)!},$$

da $|\cos x| \leq 1$ und $5 < \frac{5\pi}{\pi} < \frac{18}{\pi}$. Wegen $100 < 5^4 4!$ folgt

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \approx 0.98.$$

iv) Die Maclaurinsche Reihe der Funktion ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Für das Restglied gilt

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{\vartheta}{2}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

da $\vartheta \in (0,1)$. Wegen $100 < 5 \cdot 2^5 = 160$ folgt

$$\ln 1.5 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0.40.$$

b) Die Maclaurinsche Reihe der Sinusfunktion ist

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-)!} + \cdots.$$

Für das Restglied gilt

$$R_{2n}(x) = (-1)^n\cos(\vartheta x)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{also ist}$$

$$|R_{2n}(x)| \leq \frac{10^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

da $|\cos x| \leq 1$ und $|x| < 10$. Wir suchen also ein n mit $10^{2n+2} \leq (2n+1)!$.

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
1	1	10	3628800	19	$< 1.22 \times 10^{17}$
2	2	11	39916800	20	$< 2.44 \times 10^{18}$
3	6	12	479001600	21	$< 5.11 \times 10^{19}$
4	24	13	6227020800	22	$< 1.13 \times 10^{21}$
5	120	14	87178291200	23	$< 2.59 \times 10^{22}$
6	720	15	1307674368000	24	$< 6.21 \times 10^{23}$
7	5040	16	20922789888000	25	$< 1.56 \times 10^{25}$
8	40320	17	355687428096000	26	$< 4.04 \times 10^{26}$
9	362880	18	6402373705728000	27	$> 1.08 \times 10^{28}$

Siehe nächstes Blatt!

Dies ist erst ab $2n + 1 = 27$ erfüllt. Um also die geforderte Genauigkeit zu erreichen, benötigt man das Maclaurinsche Polynom der Ordung 25.

4. Wir erinnern zunächst an die Regel von Bernoulli-de L'Hospital (B.H.):

Sind $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, hat g keine Nullstelle und gilt entweder

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{oder}$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

so gilt $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der letzte Grenzwert existiert.

Die Aussage gilt entsprechend für linksseitige Grenzwerte $x \to b$ und bleibt auch für nicht endliche Intervalle, d.h. in den Fällen $a = -\infty$ und $b = \infty$ richtig.

a) $\displaystyle \lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{3\cos 3x}{5/\cos^2 5x} = \frac{3}{5} \lim_{x\to\pi} \left(\cos 3x\, \cos^2 5x\right) = \frac{3}{5}(-1) = -\frac{3}{5}.$

b) $\displaystyle \lim_{x\to\pi} \frac{\arcsin(x-\pi)}{\tan(x-\pi)} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{1/\sqrt{1-(x-\pi)^2}}{1/\cos^2(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2(x-\pi)}{\sqrt{1-(x-\pi)^2}} = \frac{1}{1} = 1.$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin\pi x}{2x-2} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2\cos\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2+0} = 0.$

e) Mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\int_0^x e^{at^2}\,dt}{e^{ax^2}} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{at^2}\,dt + xe^{ax^2}}{2axe^{ax^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{at^2}\,dt}{2axe^{ax^2}} + \frac{1}{2a},$$

wobei $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{at^2}\,dt}{2axe^{ax^2}} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax^2}}{2ae^{ax^2} + 4a^2x^2e^{ax^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2a+4a^2x^2} = 0.$
Der Grenzwert ist also $\frac{1}{2a}$.

f) Mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \frac{\ln(b+t)}{\sqrt{b+t}}\,dt}{x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(b+x)}{\sqrt{b+x}} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/(b+x)}{1/2\sqrt{b+x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{b+x}}{b+x} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b+x}} = 0.$$

Bitte wenden!

5. **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{e^{\sin x}+1} = \dfrac{e^{\sin 0}-1}{e^{\sin 0}+1} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0.$

Die Regel von Bernoulli-de L'Hospital ist nicht anwendbar.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1/x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x+1}{2x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

d) Da die Logarithmusfunktion stetig ist, gilt

$$\ln\left(\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{\ln(6-x)}{x-5} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x\to 5} \frac{-1/(6-x)}{1} = \frac{-1/1}{1} = -1,$$

also $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{2x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-(\sin x)/x}{2+(\sin x)/x} = \dfrac{1}{2}.$

Die Regel von Bernoulli-de L'Hospital ist nicht anwendbar.

f) Ein- bzw. zweimaliges Anwenden der Regel von Bernoulli-de L'Hospital liefert

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to c} \frac{(x-c)^2}{x(\ln x-2)-c(\ln c-2)} \\
&\quad = \lim_{x\to c} \frac{2(x-c)}{\ln x-1} = \begin{cases} \frac{2(c-c)}{\ln c-1} = 0 & \text{für } c \neq e, \\ \lim\limits_{x\to c} \frac{2}{1/x} = 2e & \text{für } c = e. \end{cases}
\end{aligned}$$