Dr. Ana Cannas

Musterlösungen zu Serie 9

1. a) $\displaystyle\int_1^e t^3 \ln t\, dt = \left(\frac{t^4}{4}\ln t\right)\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e t^3\, dt = \frac{e^4}{4} - \frac{t^4}{16}\Big|_1^e = \frac{3e^4+1}{16}.$

b) Mit zweimaliger partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\, dt &= \left(-t^2\cos t\right)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt \\ &= 2\left(t\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt\right) = \pi + 2\,\cos t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.\end{aligned}$$

c) Es gelten

$$\int_0^\pi e^{4t}\sin 3t\, dt = -\left.\frac{e^{4t}\cos 3t}{3}\right|_0^\pi + \frac{4}{3}\int_0^\pi e^{4t}\cos 3t\, dt \qquad \text{und}$$
$$\int_0^\pi e^{4t}\cos 3t\, dt = \left.\frac{e^{4t}\sin 3t}{3}\right|_0^\pi - \frac{4}{3}\int_0^\pi e^{4t}\sin 3t\, dt,$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{4t}\sin 3t\, dt &= \frac{9}{25}\left(\left.\frac{4e^{4t}\sin 3t}{9}\right|_0^\pi - \left.\frac{e^{4t}\cos 3t}{3}\right|_0^\pi\right) \\ &= \left.\frac{4e^{4t}\sin 3t - 3e^{4t}\cos 3t}{25}\right|_0^\pi = \frac{3(e^{4\pi}+1)}{25}.\end{aligned}$$

d) Mit partieller Integration erhält man zunächst

$$\int_0^\pi \frac{t\,\sin t}{1+\cos^2 t}\, dt = -\,t\arctan(\cos t)|_0^\pi + \int_0^\pi \arctan(\cos t)\, dt.$$

Das letzte Integral verschwindet, denn

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \arctan(\cos t)\, dt &= -\int_0^\pi \arctan(\cos(\pi - t))\, dt \\ &= -\int_0^\pi \arctan(\cos t)\, dt.\end{aligned}$$

Also gilt $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\,\sin t}{1+\cos^2 t}\, dt = -\pi\arctan(\cos\pi) = \frac{\pi^2}{4}.$

Bitte wenden!

2. **a)** Mit der Substitution $x = t^2$ ergibt sich

$$\int_1^2 \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_1^4 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\big|_1^4 = \ln\frac{5}{2}.$$

b) Mit der Substitution $x = \ln t$ ergibt sich

$$\int_2^3 \frac{1}{t\,\ln^2 t}\,dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}.$$

c) Mit der Substitution $x = t^3$ ergibt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{2}+1)\,t^2}{\cos^2(\pi\,t^3)}\,dt = \frac{\sqrt{2}+1}{3}\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{dx}{\cos^2(\pi\,x)} = \frac{\sqrt{2}+1}{3\,\pi}\,\tan(\pi\,t)\big|_0^{\frac{1}{8}}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}+1)\left(\sqrt{2}-1\right)}{3\,\pi} = \frac{1}{3\,\pi}.$$

3. **a)** Mit dem Ansatz

$$\frac{7t-5}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} \qquad \text{bzw.}$$
$$7t-5 = A(t-1) + B(t+1)$$

ergeben sich $-12 = -2A$ und $2 = 2B$ also $A = 6$ und $B = 1$. Somit ist

$$\int \frac{7t-5}{t^2-1}\,dt = \int \frac{6}{t+1}\,dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt$$
$$= \ln|t+1|^6 + \ln|t-1| + c.$$

b) Aus $\dfrac{4t^2+4t-11}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)\left(t-\frac{5}{2}\right)} = \dfrac{A}{t-\frac{1}{2}} + \dfrac{B}{t+\frac{3}{2}} + \dfrac{C}{t-\frac{5}{2}}$ ergeben sich

$$-8 = A\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right) = -4A,$$
$$-8 = B\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right) = 8B,$$
$$24 = C\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right) = 8C,$$

Also $A = 2$, $B = -1$ und $C = 3$. Somit ist

$$\int \frac{4t^2+4t-11}{(2t-1)(2t+3)(2t-5)}\,dt$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int \frac{2}{t-\frac{1}{2}}\,dt - \int \frac{1}{t+\frac{3}{2}}\,dt + \int \frac{3}{t-\frac{5}{2}}\,dt\right)$$
$$= \ln\left|t-\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{4}} - \ln\left|t+\frac{3}{2}\right|^{\frac{1}{8}} + \ln\left|t-\frac{5}{2}\right|^{\frac{3}{8}} + c.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{8t^2-2t-43}{(t-5)(t+2)^2} &= \frac{A}{t-5}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2} \qquad \text{bzw.}\\ 8t^2-2t-43 &= A(t+2)^2+B(t-5)(t+2)+C(t-5)\end{aligned}$$

ergeben sich

$$\begin{aligned}147 = 200-10-43 &= 49A\\ -7 = 32+4-43 &= -7C\\ -43 &= 4A-10B-5C\end{aligned}$$

also $A=3$, $C=1$ und $B=\dfrac{4A-5C+43}{10}=\dfrac{50}{10}=5.$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{8t^2-2t-43}{(t-5)(t+2)^2}\,dt &= \int \frac{3}{t-5}\,dt+\int \frac{5}{t+2}\,dt+\int \frac{1}{(t+2)^2}\\ &= \ln|t-5|^3+\ln|t+2|^5-\frac{1}{t+2}+c.\end{aligned}$$

d) Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{3t^2-4t-1}{(t-1)^3} &= \frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{(t-1)^3} \qquad \text{bzw.}\\ 3t^2-4t-1 &= A(t-1)^2+B(t-1)+C\end{aligned}$$

ergeben sich

$$\begin{aligned}-1 &= A-B+C,\\ 6 &= 4A-2B+C,\\ -2 &= C\end{aligned}$$

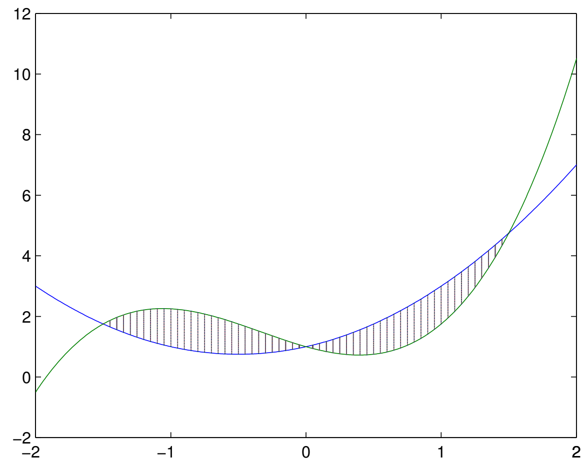
also $1=A-B$ und $4=2A-B$ und daher $A=3$ und $B=2$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^2-4t-1}{(t-1)^3}\,dt &= \int \frac{3}{t-1}\,dt+\int \frac{2}{(t-1)^2}\,dt-\int \frac{2}{(t-1)^3}\,dt\\ &= \ln|t-1|^3-\frac{2}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+c.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^3 + x^2 - \frac{5}{4}\,x + 1.$$



a) Berechnen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

Wir müssen die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^3 + x^2 - \frac{5}{4}x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \left(x^3 + x^2 - \frac{5}{4}x + 1\right) - (x^2 + x + 1) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^3 - \frac{9}{4}x \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Die gesuchten Stellen sind also:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{3}{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} (f(x) - g(x))\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_3} (f(x) - g(x))\, dx &= \int_{-3/2}^{3/2} \left(\frac{9}{4}x - x^3\right) dx \\
&= \left[\frac{9}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{x=-\frac{3}{2}}^{x=\frac{3}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses: Die beiden schraffierten Flächen (siehe Skizze auf dem Aufgabenblatt) sind gleich gross. Im Gegensatz zur rechten Fläche steuert die linke allerdings einen *negativen* Wert zum Integral bei, da der Graph von f zwischen x_1 und x_2 unterhalb des Graphen von g verläuft. Das gesamte Integral ergibt sich deswegen zu 0.

c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

Der Inhalt der schraffierten Fläche ist durch

$$\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)|\, dx$$

gegeben (beachte die Betragsstriche!). Da der Graph von f zwischen x_1 und x_2 unterhalb des Graphen von g verläuft, zwischen x_2 und x_3 jedoch oberhalb, können wir die Betragsstriche folgendermassen loswerden:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)|\, dx &= \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\, dx \\
&= \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left(x^3 - \frac{9}{4}x\right) dx + \int_{0}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{4}x - x^3\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{8}x^2\right]_{x=-\frac{3}{2}}^{x=0} + \left[\frac{9}{8}x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}} \\
&= -\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3^4}{2^4} - \frac{9}{8} \cdot \frac{3^2}{2^2}\right) + \left(\frac{9}{8} \cdot \frac{3^2}{2^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3^4}{2^4}\right) \\
&= -\frac{81}{64} + \frac{81}{32} + \frac{81}{32} - \frac{81}{64} \\
&= \frac{81}{32}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

5. **a)** Wegen $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = -\sin t\cos t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$ gilt

$$\begin{aligned}\pi = t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\,dt \\ &= \sin t\cos t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt,\end{aligned}$$

also $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$.

b) Mit der Substitution $x = \sqrt{t/2}$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{g\to 2}\int_1^g \frac{dt}{\sqrt{t\,(2-t)}} &= \lim_{g\to 2}\int_1^g \frac{dt}{\sqrt{2t}\,\sqrt{1-t/2}} = \lim_{g\to 1}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^g \frac{4x\,dx}{2x\,\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2\lim_{g\to 1}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^g \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\lim_{g\to 1} \arcsin x|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^g \\ &= 2\left(\arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

c) Mit partieller Integration und der Substitution $x = \sqrt{t}$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{g\to\infty}\int_1^g \frac{\sqrt{t}\,dt}{(1+t)^2} &= -\lim_{g\to\infty} \left.\frac{\sqrt{t}}{1+t}\right|_1^g + \lim_{g\to\infty}\int_1^g \frac{dt}{2\sqrt{t}\,(1+t)} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{g\to\infty}\int_1^g \frac{1}{1+\left(\sqrt{t}\right)^2}\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{g\to\infty}\int_1^g \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{g\to\infty} \arctan x|_1^g \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{g\to\infty} \arctan g - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$