D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 13
Dr. Ana Cannas

Musterlösungen zu Serie 10

1. **a)** Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt für $x, y \neq 0$

$$y' = u + xu' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2\,\frac{y}{x}} = \frac{1 + u^2}{2u},$$

also $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1 - u^2}{2u}\,\dfrac{1}{x}$ bzw. $\displaystyle\int \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x}$ für $u \neq 1$ und somit

$$\ln|u^2 - 1| = C - \ln|x| \quad \Rightarrow \quad |u^2 - 1| = \frac{C}{|x|} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{x + C}{x},$$

wobei C eine generische Konstante bezeichnet. Demnach ist

$$y(x) = \pm\sqrt{x(x + C)} \quad \text{und insbesondere} \quad y(1) = \pm\sqrt{1 + C} = 2,$$

also $C = 3$ und $y(x) = \sqrt{x(x + 3)}$.

b) Mit der Substitution $u = x + y + 1$ folgt

$$y' = u' - 1 = (x + y + 1)^2 = u^2,$$

also $\dfrac{du}{dx} = 1 + u^2$ bzw. $\displaystyle\int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx$ und somit

$$\arctan u = x + C \quad \Rightarrow \quad u = \tan(x + C) \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}.$$

Demnach ist

$$y(x) = \tan(x + C) - x - 1 \quad \text{und insbesondere} \quad y(0) = \tan C - 1 = -2,$$

also $C = -\frac{\pi}{4}$ und $y(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - x - 1.$

c) Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt für $x \neq 0$

$$y' = u + xu' = \frac{y}{x}\left(1 - \ln\frac{y}{x}\right) = u\,(1 - \ln u)\,,$$

also $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u\ln u}{x}$ bzw. $\displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = -\int \frac{dx}{x}$ für $u \notin \{0,1\}$ und somit

$$\ln|\ln u| = C - \ln|x| \quad\Rightarrow\quad |\ln u| = \frac{C}{|x|} \quad\Rightarrow\quad u = e^{\frac{C}{x}},$$

wobei C eine generische Konstante bezeichnet. Demnach ist

$$y(x) = xe^{\frac{C}{x}} \quad \text{und insbesondere} \quad y(1) = e^C = e^\pi,$$

also $C = \pi$ und $y(x) = xe^{\frac{\pi}{x}}$.

d) Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt für $x \neq 0$

$$y' = u + xu' = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = u\,(1-u)$$

also $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-u^2}{x}$ bzw. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x}$ für $u \neq 0$ und somit

$$\frac{1}{u} = \ln|x| - C \quad\Rightarrow\quad u = \frac{1}{\ln|x| - C} \quad\Rightarrow\quad y(x) = \frac{x}{\ln|x| - C},$$

insbesondere $y(e) = \frac{e}{1-C} = \pi$, also $C = \frac{\pi - e}{\pi}$ und $y(x) = \dfrac{\pi x}{\pi(\ln|x| - 1) + e}$.

2. a) Die homogene Gleichung

$$y' + \frac{y}{x+1} = 0$$

lässt sich durch Separation der Variablen lösen. Für $y \neq 0$ gilt

$$\ln|y| = -\int\frac{dx}{x+1} = C - \ln|x+1| \qquad\Rightarrow\qquad y = \frac{C}{x+1}.$$

Mit dem Ansatz $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{x+1}$ ergibt sich

$$y_p' = \frac{C'}{x+1} - \frac{C}{(x+1)^2} = e^{-x} - \frac{y_p}{x+1} = e^{-x} - \frac{C}{(x+1)^2},$$

also $C' = (x+1)e^{-x}$ und damit

$$C = \int (x+1)e^{-x}\,dx = D - (x+2)e^{-x}.$$

Siehe nächstes Blatt!

also $y(x) = \dfrac{D - (x+2)e^{-x}}{x+1}$ für ein $D \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung

$$0 = y(x) = D - 2 \qquad \text{folgt} \qquad y(x) = \frac{2 - (x+2)e^{-x}}{x+1}.$$

b) Die homogene Gleichung $y' + 4xy = 0$ lässt sich durch Separation lösen:

$$\ln|y| = -4\int x\,dx = C - 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = Ce^{-2x^2}$$

für $y \neq 0$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)e^{-2x^2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p' &= C'e^{-2x^2} - 4Cxe^{-2x^2} \\ &= 4xe^{-2x^2} - 4xy_p = 4xe^{-2x^2} - 4Cxe^{-2x^2}, \end{aligned}$$

also $C' = 4x$ und damit $C = 4\displaystyle\int x\,dx = 2x^2 + D$. Somit ist

$$y(x) = \left(2x^2 + D\right)e^{-2x^2}, \quad \text{insbesondere} \quad 3 = y(0) = D$$

und somit $y(x) = \left(2x^2 + 3\right)e^{-2x^2}$.

c) Die homogene Gleichung $y' = y/x$ lässt sich durch Separation lösen:

$$\ln|y| = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - C \qquad \Rightarrow \qquad y = Cx$$

für $y \neq 0$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)x$ ergibt sich

$$xy_p' = C'x^2 + Cx = y_p + x^2 + x + 1 = Cx + x^2 + x + 1$$

also $C' = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ und damit

$$C = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \ln x + x - \frac{1}{x} + D,$$

also $y(x) = (D + \ln x)x + x^2 - 1$ für ein $D \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung

$$-3 = y(1) = D \qquad \text{folgt} \qquad y(x) = (\ln x - 3)x + x^2 - 1.$$

Bitte wenden!

d) Die homogene Gleichung $y' \sin x = y \cos x$ lässt sich durch Separation lösen:

$$\ln|y| = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \ln|\sin x| - C \qquad \Rightarrow \qquad y = C \sin x$$

für $y \neq 0$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x) \sin x$ ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p' \sin x &= C' \sin^2 x + C \sin x \cos x \\ &= y_p \cos x + 4 \sin^4 x = C \sin x \cos x + 4 \sin^4 x \end{aligned}$$

also $C' = 4 \sin^2 x$ und damit

$$C = 4 \int \sin^2 x \, dx = 2x - \sin(2x) - D,$$

also $y(x) = (2x - \sin(2x) - D) \sin x$. Aus der Anfangsbedingung

$$0 = y(\pi/2) = \pi - D \qquad \text{folgt} \qquad y(x) = (2x - \sin(2x) - \pi) \sin x.$$

3. **a)** Die Gleichung lautet

$$p'(t) = \frac{1}{256} p \left(1 - \frac{p}{100}\right),$$

wobei p die Population in Milliarden bezeichnet.

b) Die Lösung dieser Gleichung mit Initialdatum $p(0) = 5.3$ (siehe Vorlesung für eine Herleitung) ist gegeben durch

$$p(t) = 100 \left(1 - \frac{\frac{94.7}{5.3}}{e^{\frac{t}{265}} + \frac{94.7}{5.3}}\right)$$

Es folgt $p(10) = 5.492$.

c) Es gilt $p(110) = 7.814$, $p(510) = 27.718$.

d) Wir verfahren analog und ersetzen 100 durch 50. In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch

$$p(t) = 50 \left(1 - \frac{8.434}{e^{\frac{t}{265}} + 8.434}\right)$$

Es folgt $p(1) = 5.481$, $p(110) = 7.612$ und $p(510) = 22.413$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{K y_0 \mathrm{e}^{kt}}{K + y_0\left(\mathrm{e}^{kt} - 1\right)}$$

a) Die Bedingungen $y(0) = y_0 = 2 \cdot 10^7$ kg und $K = 8 \cdot 10^7$ kg liefern

$$y(1) \approx 3.2324 \cdot 10^7 \text{ kg.}$$

b) Wir müssen die Gleichung

$$2y_0 = \frac{K y_0 \mathrm{e}^{kt}}{K + y_0\left(\mathrm{e}^{kt} - 1\right)}$$

nach t auflösen. Division durch y_0 und Multiplikation mit dem Nenner der rechten Seite ergibt die erste Formelzeile, dann ergeben sich die anderen durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned} 2K + 2y_0\left(\mathrm{e}^{kt} - 1\right) &= K\mathrm{e}^{kt} \\ 2K - 2y_0 &= (K - 2y_0)\mathrm{e}^{kt} \\ 2\frac{K - y_0}{K - 2y_0} &= \mathrm{e}^{kt} \\ \log\left(2\frac{K - y_0}{K - 2y_0}\right) 1/k &= t \end{aligned}$$

Es folgt $t = \log(\sqrt[k]{3}) \approx 1.547$ Jahre.

5. **a)** Konstante Lösungen sind genau jene, für die $y'(t) = 0$. Da

$$y'(t) = y^4 - 6y^3 + 5y^2 = y^2\left(y - 1\right)\left(y - 5\right),$$

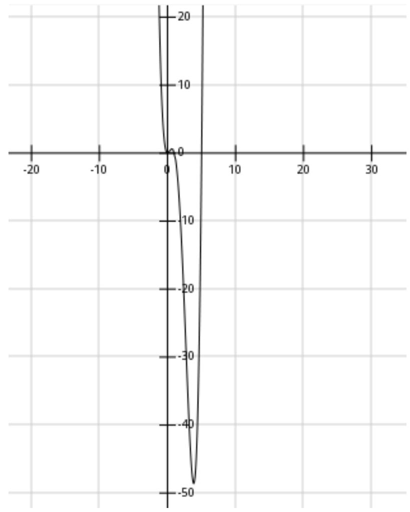
sind das genau die Nullstellen des Polynoms auf der rechten Seite, nämlich

$$y_0(t) \equiv 0,\ y_1(t) \equiv 1 \text{ und } y_5(t) \equiv 5.$$

Dies sind die sogenannten Gleichgewichtslösungen.

Bitte wenden!

b) Die Funktion y ist dann wachsend, wenn $y'(t) \geq 0$. Analyse der Funktion $y^4 - 6y^3 + 5y^2$, welche die Steigung von y beschreibt,



ergibt, dass $y'(t) \geq 0$ ist, wenn $y \leq 1$ oder $y \geq 5$.

c) Die Funktion y is dann fallend, wenn $y'(t) \leq 0$. Wie bei b) sieht man, dass die Funktion $y^4 - 6y^3 + 5y^2 \leq 0$ ist für $y \in [1, 5]$.