Musterlösungen zu Serie 11

1. **a)** Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{\vec{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A\vec{x}; \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung eines Systems der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit einer 2×2-Matrix A mit verschiedenen Eigenwerten ist allgemein gegeben durch

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \tag{1}$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte (EW) der Matrix A sind, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ zugehörigen Eigenvektoren (EV) bezeichnen und c_1, c_2 Konstanten sind, die durch die Anfangsbediengung $\vec{x}(0)$ bestimmt werden. Es gelten also:

$$\begin{array}{ll} A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, & \quad \vec{v}_1 \neq 0 \\ A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2, & \quad \vec{v}_2 \neq 0. \end{array} \tag{2}$$

Es genügt diese Relationen zu verwenden, um zu überprüfen , dass (1) wirklich eine Lösung des Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist. Ferner folgt aus (2), dass die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ (wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$) linear unabhängig sind.

Es ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 12 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35, \end{aligned}$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 35}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+35}}{2} = 1 \pm 6,$$

d.h. $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -5$.

Einsetzen dieser Werte in (2) liefert die EV:

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

und die allgemeine Lösung (1) des AWP lautet:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbediengung liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}.$$

Also erhalten wir $\vec{x}(t) = \dfrac{1}{2} e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten das AWP

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} =: A\vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$ also sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ die EW.

Für die EV erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

so dass

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

die allgemeine (*komplexe*) Lösung ist.

Aus der Anfangsbediengung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2, \\ 3 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

und somit $c_1 = \frac{1}{2}(1 - 3i)$, $c_2 = \frac{1}{2}(1 + 3i)$.

Die Lösung des AWP ist also

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{i}\right) e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{i}\right) e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ -\frac{e^{it}+e^{-it}}{2i} + 3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -\sin t + 3\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Bemerkung: Wegen $\ddot{x} = \dot{y} = -x$, gilt

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = y(0) = 3.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist (vgl. Serie 2)

$$x(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

und mit $1 = x(0) = a$ und $3 = y(0) = b$ erhalten wir wiederum

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + 3\sin t \\ y(t) &= \dot{x}(t) = -\sin t + 3\cos t. \end{aligned}$$

Allgemein ist m Fall nichtreeller (also komplex konjugierter) EW λ, $\bar{\lambda}$ mit zugehörigen EV $\vec{w}$, $\bar{\vec{w}}$ die allgemeine Lösung eines (2×2)-Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ eine Linearkombination der Funktionen $e^{\lambda t}\vec{w}$ und $e^{\bar{\lambda} t}\bar{\vec{w}}$ und also, falls die Koeffizientenmatrix A reell ist, auch der Funktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{w}\right) &= e^{\gamma t}\left(\cos(\omega t)\vec{u} - \sin(\omega t)\vec{v}\right) \qquad \text{und} \\ \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{w}\right) &= e^{\gamma t}\left(\sin(\omega t)\vec{u} + \cos(\omega t)\vec{v}\right), \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \gamma + i\omega$ und $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$. Es gilt also

$$\vec{x}(t) = e^{\gamma t}\left(\left(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right)\vec{u} + \left(-c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t)\right)\vec{v}\right) \tag{3}$$

mit Konstanten c_1, c_2, die durch $\vec{x}(0) = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$ bestimmt sind.

Für das gegebene AWP sind $\gamma = 0$, $\omega = 1$,

$$\vec{u} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Einsetzen in (3) liefert wiederum die obige Lösung.

c) Wir schreiben

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakeristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1, \end{aligned}$$

also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 =: \lambda$ ein doppelter Eigenwert.

Dies ist ein weiterer Spezialfall des (2×2)-Problems. Die Matrix A ist *nicht diagonalisierbar*. Es gibt nur einen EW λ und also nur einen EV $\vec{v}$ (bis auf lineare

Bitte wenden!

Vielfache, und ausser im trivialem Fall $A = \lambda E_2$). In diesem Spezialfall wird die allgemeine Lösung nicht durch $\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$ gegeben, da dies zu

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\vec{v} =: c e^{\lambda t}\vec{v}$$

und also $\vec{x}(0) = c\vec{v}$ führen würde. Dies *kann nicht* die allgemeine Lösung sein, da als Anfangsbedingungen nur Vielfache von $\vec{v}$ in Betracht kommen.

Statt dessen, wird in diesem Spezialfall die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 t e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\vec{w}, \tag{4}$$

wobei $\vec{w}$ so zu wählen ist, dass $(A - \lambda E_2)\vec{w} = \vec{v}$. Es ist leicht einzusehen, dass die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und (4) die DGL $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ erfüllt.

Für die gegebene Gleichung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{also z.B.} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also z.B.} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

und somit $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 2c_1 + 2c_2 t \\ c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix}$.

Aus $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_2 = 2$.

2. **a)** Wir betrachten das AWP

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 10\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 3)(\lambda + 2) - (-2)\cdot 2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 3\lambda - 6 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Somit sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

Siehe nächstes Blatt!

die Eigenwerte von A. Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ergeben sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Mithin ist

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

die allgemeine Lösung des homogenen Problems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

Um eine partikuläre Lösung $\vec{x}_p$ der inhomogenen Gleichung $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ zu finden, bemerken wir zunächst, dass die Komponenten von $\vec{b}(t)$ lineare Kombinationen trigonometrischer Funktionen sind. Daher führt der Ansatz

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix}, \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

sicher auf eine Lösung. Für diese Lösung gelten

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_p(t) &= \begin{pmatrix} -A\sin t + B\cos t \\ -C\sin t + D\cos t \end{pmatrix}, \\ A\,\vec{x}_p(t) + \vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\,\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3A + 2C + 10)\cos t + (3B + 2D)\sin t \\ (-2A - 2C)\cos t + (-2B - 2D)\sin t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

für alle t (insbesondere $t = 0$ und $t = \pi/2$) und also

$$\begin{aligned} 3A - B + 2C &= -10, \qquad & A + 3B + 2D &= 0, \\ 2A + 2C + D &= 0, \qquad & 2B - C + 2D &= 0. \end{aligned}$$

Das Gaussverfahren liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

also $D = 2$, $C = 6$, $B = 1$ und $A = -7$. Somit ist

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -7\cos t + \sin t \\ 6\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Da die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Problems notwendig eine Lösung des homogenen Problems, d.h. von der Form (6) ist, ist die allgemeine Lösung des AWP (5) von der Form

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\cos t + \sin t \\ 6\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also $2c_1 + c_2 = c_1 + 2c_2 = 3$ und somit $c_1 = c_2 = 1$.

b) Es seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= -2 + \lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ergeben sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad &\Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad &\Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\vec{x}_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die allgemeine Lösung für das homogene Problem.

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-2t} + Be^{t} \\ Ce^{-2t} + De^{t} \end{pmatrix}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Setzen wir diesen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}_p(t) &= \begin{pmatrix} -2Ae^{-2t} + Be^t \\ -2Ce^{-2t} + De^t \end{pmatrix}, \\
A\,\vec{x}_p(t) + \vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} Ae^{-2t} + Be^t + Ce^{-2t} + De^t + e^{-2t} \\ 4Ae^{-2t} + 4Be^t - 2Ce^{-2t} - 2De^t - 2e^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A + C + 1)e^{-2t} + (B + D)e^t \\ (4A - 2C)e^{-2t} + (4B - 2D - 2)e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle t. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\begin{aligned}
3A + C + 1 &= 0, & D &= 0, \\
4A &= 0, & 4B - 3D - 2 &= 0,
\end{aligned}$$

also $A = D = 0$, $C = -1$ und $B = \frac{1}{2}$. Somit ist

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung ist demnach durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

gegeben. Setzen wir die Anfangsbedingung ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + \frac{1}{2} \\ c_1 + 4c_2 - 1 \end{pmatrix},$$

also $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = 0$. Somit ist

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{2t} + e^t \\ -e^{2t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

die Lösung zur gegebenen Anfangsbedingung.

Bitte wenden!

3. **a)** Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1+\lambda)\left((2-\lambda)(1+\lambda)-2\right) = (1+\lambda)(1-\lambda)\lambda$$

hat die Wurzlen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ folgt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und da alle Eigenwerte verschieden sind, ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

b) Da die zweite Gleichung von den ersten und dritten „entkoppelt" ist, führt der Ansatz $\vec{y}_{p_1} = \begin{pmatrix} Ae^{2x} & 0 & Be^{2x} \end{pmatrix}^T$ auf eine partikuläre Lösung. Aus

$$\begin{pmatrix} 2Ae^{2x} \\ 0 \\ 2Be^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{2x} \\ 0 \\ Be^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2A-2B+1)e^{2x} \\ 0 \\ (A-B)e^{2x} \end{pmatrix}$$

finden wir durch Koeffizientenvergleich $A = \frac{3}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$.

Somit ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 0 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Mit dem der Ansatz $\vec{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $0 = -C + 6$, also $\vec{y}_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_2}(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 6 \\ c_1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

d) Die Inhomogenität ist gerade die Summe der beiden in den vorigen Teilaufgaben behandelten Inhomogenitäten. Daher ist die Summe $\vec{y}_{p_1} + \vec{y}_{p_2}$ eine partikuläre Lösung und für die allgemeine Lösung gilt

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_{p_1}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{3}{2}\, e^{2x} \\ 6 \\ c_1 + \frac{1}{2}\, e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

4. a) Wir erinnern zunächst daran, dass eine lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{7}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ stets ein *Fundamentalsystem* von n linear unabhängigen Lösungen besitzt und sich somit jede Lösung von (7) als Linearkombination dieses Systems ergibt. Hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \tag{8}$$

die Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit der jeweiligen Vielfachheit $k_1, \ldots, k_r$, so bilden

$$\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \cdots & x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & x e^{\lambda_2 x}, & \cdots & x^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, & x e^{\lambda_r x}, & \cdots & x^{k_r - 1} e^{\lambda_r x}, \end{array}$$

ein solches System von $n = k_1 + \cdots + k_r$ Funktionen.

i) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1\right)\lambda = (\lambda - 1)^3\,\lambda$$

hat die einfache Wurzel 0 und die dreifache Wurzel 1. Daher bilden

$$1 = e^0 \quad \text{und} \quad e^x, \quad x e^x, \quad x^2 e^x$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = A + B e^x + C x e^x + D x^2 e^x$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Sind die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1}$ in Gleichung (7) reell, so ist mit jeder k-fachen Wurzel $\lambda = a + ib$ des charakteristischen Polynoms auch $\bar{\lambda} = a - ib$ eine solche Wurzel. Mit den Eulerschen Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

erhalten wir so aus den $2k$ linear unabhängigen komplexen Lösungen

$$\begin{array}{llll} e^{(a+ib)x}, & xe^{(a+ib)x}, & \cdots & x^{k_1-1}e^{(a+ib)x}, \\ e^{(a-ib)x}, & xe^{(a-ib)x}, & \cdots & x^{k_1-1}e^{(a-ib)x}, \end{array}$$

durch Bilden von Linearkombinationen die $2k$ reellen Lösungen

$$\begin{array}{llll} e^{ax}\cos(bx), & xe^{ax}\cos(bx), & \cdots & x^{k_1-1}e^{ax}\cos(bx), \\ e^{ax}\sin(bx), & xe^{ax}\sin(bx), & \cdots & x^{k_1-1}e^{ax}\sin(bx). \end{array}$$

Die lineare Differentialgleichung (7) besitzt also (im Fall reeller Koeffizienten) stets ein Fundamentalsystem von n reellen linear unabhängigen Lösungen, auch wenn die Wurzeln des charakteristischen Polynoms nicht alle reell sind.

ii) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2\right)^2 + 2\left(\lambda^2\right) + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$$

besitzt die doppelten Wurzeln i und $-i$. Daher ist

$$\cos x, \quad x\cos x, \quad \sin x, \quad x\sin x,$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

iii) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right)\lambda^2$$

hat die doppelte Wurzel 0 und die einfachen Wurzeln $1 \pm 2i$. Daher ist

$$1, \quad x, \quad e^x\cos(2x), \quad e^x\sin(2x)$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = A + Bx + Ce^x\cos(2x) + De^x\sin(2x)$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

iv) Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = \left(\lambda^2\right)^2 + 4\left(\lambda^2\right) + 4 = \left(\lambda^2 + 2\right)^2$$

hat die doppelten Wurzeln $\pm\sqrt{2}\,i$. Daher ist

$$\cos\left(\sqrt{2}\,x\right), \quad x\cos\left(\sqrt{2}\,x\right), \quad \sin\left(\sqrt{2}\,x\right), \quad x\sin\left(\sqrt{2}\,x\right),$$

ein Fundamentalsystem und jede reelle Lösung ist von der Form

$$y(x) = (A + Bx)\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) + (C + Dx)\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$$

mit reellen Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

b) Wir bemerken zunächst: hat eine lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = q(x) \tag{9}$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ eine Inhomogenität der Gestalt

$$q(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)\, e^{\mu x},$$

wobei μ eine k-fache Wurzel des charakteristischen Polynoms (8) ist ($k = 0$ bedeutet $p(\mu) \neq 0$), so besitzt (9) die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\, x^k e^{\mu x},$$

für $m = 0$ ist speziell $y_p(x) = \dfrac{b_0 x^k e^{\mu x}}{p^{(k)}(\mu)}$.

Die allgemeine Lösung von (9) setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (7) und einer partikulären Lösung von (9) zusammen.

Für die in Frage stehende Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \left(\lambda^2 - 1\right)\lambda$ mit den drei einfachen Wurzeln 0, 1 und -1 und dem Fundamentalsystem 1, e^x, e^{-x}.

i) Die Inhomogenität ist (in obiger Notation) von der Gestalt

$$q(x) = e^{2x} = b_0 e^{\mu x} \quad \text{mit} \quad b_0 = 1, \quad \mu = 2, \quad m = k = 0,$$

also ist $y_p(x) = \dfrac{e^{2x}}{8-2} = \dfrac{e^{2x}}{6}$ eine partikuläre Lösung und somit

$$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} + \frac{e^{2x}}{6}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden!

ii) Die Inhomogenität ist von der Gestalt

$$q(x) = e^x = b_0 e^{\mu x} \quad \text{mit} \quad b_0 = 1, \quad \mu = 1, \quad m = 0, \quad k = 1,$$

also ist $y_p(x) = \dfrac{xe^x}{3-1} = \dfrac{xe^x}{2}$ eine partikuläre Lösung und somit

$$y(x) = A + \left(B + \frac{x}{2}\right) e^x + Ce^{-x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

iii) Die Inhomogenität ist von der Gestalt

$$q(x) = x^2 = b_2 x^2 e^{\mu x} \quad \text{mit} \quad b_2 = 2, \quad \mu = 0, \quad m = 2, \quad k = 1,$$

also ist $y_p(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right) x$ für gewisse $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich aus

$$\begin{aligned} x^2 = q(x) = y_p^{(3)} - y_p' &= 6c_2 - \left(c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2\right) \\ &= 6c_2 - c_0 - 2c_1 x - 3c_2 x^2 \end{aligned}$$

$c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = 0$, $c_0 = 6c_2 = -2$ und somit

$$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} + -\frac{x^3}{3} - 2x, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ in Gleichung (9) reell und ist die Inhomogenität der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Funktion $q(x)$ der obigen Gestalt, so ist offenbar der Real- bzw. Imaginärteil der oben angegebenen Funktionen y_p eine partikulären Lösungen der Gleichung (9).

iv) Die Inhomogenität ist von der Gestalt

$$q(x) = \cos x = \operatorname{Re}\left(b_0 e^{\mu x}\right) \quad \text{mit} \quad b_0 = 1, \quad \mu = i, \quad m = 0, \quad k = 0,$$

also ist $y_p(x) = \operatorname{Re} \dfrac{e^{ix}}{i^3 - i} = \operatorname{Re} \dfrac{ie^{ix}}{2} = -\dfrac{\sin x}{2}$ eine partikuläre Lösung und

$$y(x) = A + Be^x + Ce^{-x} - \frac{\sin x}{2}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Das charakteristische Polynom

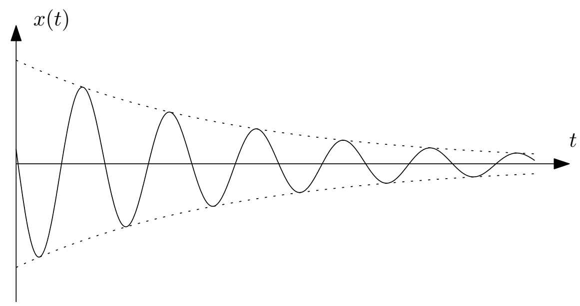
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2d\lambda + k$$

hat die Wurzeln $\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k}$.

i) In diesem Fall gilt $\lambda_{1,2} = -d \pm i\omega_0$ mit $\omega_0 = \sqrt{k - d^2}$, also

$$x(t) = c_1 e^{-dt} \cos(\omega_0 t) + c_2 e^{-dt} \sin(\omega_0 t) = A e^{-dt} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

für gewisse Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bzw. eine gewisse Amplitude A und eine gewisse Phase φ.

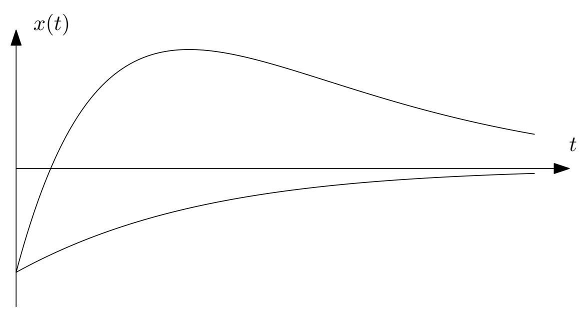


Insbesondere klingt jede Lösung exponentiell auf 0 ab.

ii) In diesem Fall ist $\lambda = -d$ eine doppelte Wurzel und

$$x(t) = c_1 e^{-dt} + c_2 t e^{-dt} = (c_1 + c_2 t)\, e^{-dt}.$$

In diesem Fall klingt also jede nicht-triviale Lösung exponentiell auf 0 ab, hat höchstens ein Extremum und geht höchstens einmal durch 0.



iii) In diesem Fall gilt $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ und

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Wegen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ klingt auch in diesem Fall jede Lösung $\neq 0$ exponentiell auf 0 ab, hat höchstens ein Extremum und geht höchstens einmal durch 0.

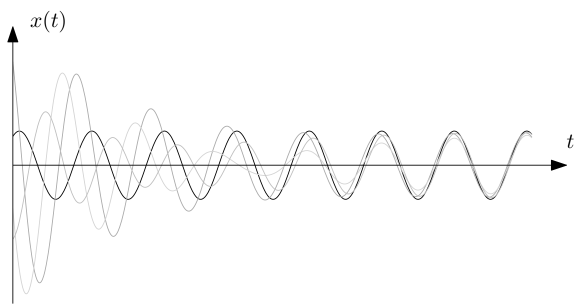
Bitte wenden!

b) Eine partikuläre Lösung ist durch

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \operatorname{Re} \frac{K e^{i\omega t}}{k - \omega^2 + 2di\omega} = \operatorname{Re} \frac{K e^{i\omega t} \left(k - \omega^2 - 2di\omega\right)}{\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2} \\ &= \frac{K\left(k-\omega^2\right)\cos\omega t}{\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2} + \frac{2Kd\omega\sin\omega t}{\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2} = A\sin\left(\omega t + \varphi\right) \end{aligned}$$

gegeben, wobei

$$A = \frac{K\sqrt{\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2}}{\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2} = \frac{K}{\sqrt{\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2}}$$



Die allgemeine Lösung setzt sich aus dieser partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zusammen. Da letztere - wie in Teilaufgabe **a)** gezeigt - stets exponentiell auf 0 abklingen, hat somit jede Lösung dasselbe Langzeitverhalten wie diese partikuläre Lösung.

c) Es gelten

$$A'(\omega) = \frac{2K\omega\left(k - 2d^2 - \omega^2\right)}{\left(\left(k-\omega^2\right)^2 + 4d^2\omega^2\right)^{3/2}}, \quad \lim_{\omega\to 0} A(\omega) = \frac{K}{k}, \quad \lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0.$$

Ist $k \leq 2d^2$, so fällt A streng monoton auf 0 ab.

Anderenfalls wächst $A(\omega)$ streng monoton bis zur Frequenz $\omega_R = \sqrt{k - 2d^2}$, in der sie das globale Maximum

$$A\left(\omega_R\right) = \frac{K}{2d}\,\frac{1}{\sqrt{k - d^2}} = \frac{K}{2d\,\omega_0}$$

erreicht und fällt anschliessend streng monoton für $\omega \to \infty$ auf 0 ab.