# Musterlösungen zu Serie 12

**1.** Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ von $A$ verschieden, so hat das AWP

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{1}$$

für jede Anfangsbedingung $\vec{x}_0$ die Lösung $\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$, wobei $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ die Eigenvektoren zu $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $c_1$, $c_2$ von $\vec{x}_0$ abhängige Konstanten bezeichnen (vgl. Aufgabe 1). Sind beide Eigenwerte reell, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \left(c_i e^{\lambda_i t}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \lambda_i > 0 \text{ und } c_1 > 0, \\ -\infty, & \text{falls } \lambda_i > 0 \text{ und } c_1 < 0, \\ 0, & \text{falls } \lambda_i < 0 \text{ oder } c_i = 0, \\ c_i, & \text{falls } \lambda_i = 0, \end{cases}$$

für $i = 1, 2$. Sind also $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems und jede nichttriviale Lösung strebt für $t \to \infty$ entweder gegen den Ursprung oder unendlich weit von diesem weg.

**a)** Hier sind $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Jede nichttriviale Lösung „explodiert" also sowohl in Richtung von $\pm\vec{v}_1$ als auch in Richtung von $\pm\vec{v}_2$ und strebt demnach für $t \to \infty$ ins Unendliche. Der Ursprung ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

**b)** Hier sind $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Jede nichttriviale Lösung strebt also zum Ursprung hin. Dieser ist somit ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

**c)** Hier ist $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$. Eine nichttriviale Lösung, die auf der durch $\vec{v}_1$ bestimmten Geraden verläuft, strebt also gegen den Ursprung. Jede andere nichttriviale Lösung nähert sich asymptotisch der durch $\vec{v}_2$ bestimmten Geraden.

Nichtreelle Eigenwerte treten stets in Paaren $\lambda$, $\bar{\lambda}$ von komplex-konjugierten Zahlen auf. Ist $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ ein Eigenvektor zu $\lambda = \gamma + i\omega$, so hat (1) die Lösung

$$\vec{x}(t) = e^{\gamma t}\left((c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t))\,\vec{u} + (-c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t))\,\vec{v}\right),$$

mit von $\vec{x}_0$ abhängigen Konstanten $c_1$, $c_2$ (vgl. Aufgabe 1). Der Imaginärteil der Eigenwerte führt also dazu, dass jede nichttriviale Lösung eine Spirale um den Ursprung beschreibt[1]. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems und jede nichttriviale Lösung strebt für $t \to \infty$ wegen

$$\lim_{t\to\infty} \left|e^{\gamma t + i\omega t}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{\gamma t} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \gamma < 0, \\ \infty, & \text{falls } \gamma > 0, \\ 1, & \text{falls } \gamma = 0 \end{cases}$$

entweder gegen den Ursprung oder unendlich weit von diesem weg, sofern sie nicht, im Fall $\gamma = 0$, periodisch mit der (minimalen) Periode $2\pi/|\omega|$ ist.

**d)** Hier ist $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, die nichttrivialen Lösungen „explodieren" also wiederum in alle Richtungen. Die Rotationsbewegung verläuft im positiven Drehsinn (d.i. im Gegenuhrzeigersinn).

**e)** Hier ist $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, die nichttrivialen Lösungen streben also für $t \to \infty$ gegen der Ursprung. Die Rotationsbewegung verläuft im postiven Drehsinn.

**2.** **a)** Die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (1, -1)^T$ und $v_2 = (0, 1)^T$. Damit ist das gesuchte Bild I.

**b)** Hier sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$. Da der Realteil negativ ist, sind die Bahnen spiralförmig einwärts verlaufend und gegen den Uhrzeigersinn (beachte, dass für $\vec{x}(0) = (1, 0)^T$ gilt: $\dot{\vec{x}}(0) = (-3/2, 2)^T$). Das passende Bild ist IV.

**c)** Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (0, 1)^T$ und $v_2 = (1, -1)^T$. Dies entspricht Bild V.

[1]Die Spiralbewegung verläuft für $\omega > 0$ im Uhr- bzw. Gegenuhrzeigersinn falls die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eine positiv bzw. negativ orientierte Basis bilden.