Dr. Ana Cannas

Musterlösungen zu Serie 2

1. **a)** Es sind

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1+1 \\ 0-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 2+1 \\ -1+0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und daher $AB \neq BA$.

b) Es sind

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & -1+2 \\ -1+3 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+3 & -2+1 \\ -1+3 & 1+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 & -1+2 \\ 0+2 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

also $(AB)C = A(BC)$.

c) Es sind

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$
$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$
$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit}$$
$$\det(AC) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Insbesondere ist also $\det(A)\det(C) = \det(AC)$.

d) Ist E eine $m_1 \times n_1$ Matrix, F eine $m_2 \times n_2$ Matrix, so ist das Produkt EF genau dann definiert, wenn $n_1 = m_2$. Daher sind die Produkte AD^T und DA definiert, nicht aber AD und $D^T A$. Es sind

$$AD^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3+1 & 0+1 \\ 0-1 & 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1-1 \\ 3+0 & 3+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Verwenden Sie folgende Facts aus der Vorlesung.

·) Eine (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$, wobei $ad - bc = \det(A)$ genau dem Wert der Determinante entspricht.

·) Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\det A)\ E_2.$$

·) Eine $(n \times m)$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A quadratisch ist (i.e. $n = m$) **und** der Gauss-Algorithmus bringt A auf obere Dreiecksform mit nicht trivialen Diagonaleinträgen (i.e. $\neq 0$).

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass $ad - bc = 1$ und $A^{-1} = A$, das heisst

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $b = 0, c = 0$ und $a = d$.
Die Bedingung $ad - bc = a^2 = 1$ impliziert, dass entweder $a = d = 1$ oder $a = d = -1$.
Das heisst, es gibt genau zwei Möglichkeiten, entweder $A = E_2$ oder $A = -E_2$.
Überprüfen Sie, dass diese Matrizen die gewünschten Eigenschaften erfüllen.

b) Unterscheiden Sie die beiden Fälle $a \neq 0$ und $a = 0$. Sei zuerst $a \neq 0$ und wenden Sie den Gauss-Algorithmus an.

Siehe nächstes Blatt!

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \overset{I:(-a)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+b\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & a & b \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \overset{II:a}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \overset{III+c\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Und schliesslich wenn $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen liefert der Gauss-Algorithmus eine Matrix mit einem Nulleintrag auf der Diagonalen. Das heisst, die Matrix ist nie invertierbar, egal was für Werte a, b und c annehmen.

<u>Alternative</u>: Verwenden Sie

Eine Matrix M ist invertierbar genau dann, wenn $\det M \neq 0$.

Berechnen Sie die Determinante mit dem Laplace-Verfahren (Entwicklung nach der ersten Spalte),

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} =& 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} \\ &+ (-b)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \\ =& 0 + a\,(a \cdot 0 - (-c)b) + (-b)\,(ac - 0 \cdot b) = abc - abc = 0, \end{aligned}$$

das heisst die Matrix ist nicht invertierbar.

c) (i) A ist invertierbar genau dann, wenn alle Diagonaleinträge (a, d, f) ungleich 0 sind.

(ii) Wie in (i): genau dann, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$.

(iii) Ja, A^{-1} ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. Im Algorithmus zur Ermittlung der Inversen werden nur folgende Operationen verwendet:

- ·) Division einer Zeile durch ein Skalar
- ·) Subtraktion eines Vielfachen der j-ten Zeile von der i-ten Zeile, wobei j>i.

Die Anwendung dieser Operationen auf A ergibt wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Bitte wenden!

(iv) Wie bei (ii): genau dann, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$.

3. **a)** In den einzelnen Schritten geschieht folgendes:

(a) Bei Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ multipliziert sich die Determinante ebenfalls um den Faktor λ. Hier wird die erste Zeile mit $\frac{1}{3}$ multipliziert.

(b) Addition bzw. Subtraktion eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht. Hier wird das 4-fache der ersten Zeile von der zweiten abgezogen.

(c) s. (b). Es wird das 3-fache der ersten Zeile von der dritten abgezogen.

(d) s. (a). Es wird die zweite Zeile mit $\frac{1}{4}$ multipliziert.

(e) s. (b). Es wird das 6-fache der zweiten Zeile von der dritten abgezogen.

(f) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge.

b) Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = 2.$$

4. Verwenden Sie wieder die Facts aus Aufgabe 2.

a) Wir erhalten für $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{6+4} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

und für $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{6-5} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Inverse einer $n \times n$ -Matrix A für $n \geq 3$ berechnet sich am einfachsten wie folgt:

- Schreibe A und die $n \times n$-Einheitsmatrix E_n nebeneinander: $(A \mid E_n)$.
- Wende auf die resultierende $n \times 2n$ -Matrix Zeilenoperationen an, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht: $(E_n \mid \cdots)$.
- Auf der rechten Seite steht dann die Inverse A^{-1} von A: $(E_n \mid A^{-1})$

b) Mit obigem Schema erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Es sind

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-2+0 & -6+6+0 & -6+6+0 \\ -2+0+2 & 4+0-3 & 4+0-4 \\ 3-1-2 & -6+3+3 & -6+3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ AA^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+4-6 & 2+0-2 & 0-2+2 \\ -3-6+9 & -2+0+3 & 0+3-3 \\ 0-2+2 & 0+3-3 & 0-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Es gilt $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Bitte wenden!

5. **a)** Es gelten

$$\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq E_2, \\
B^T B &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = E_2, \\
C^T C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \qquad\qquad \text{und} \\
D^T D &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_4.
\end{aligned}$$

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 & \dots & \vec{s}_n \end{pmatrix}$ mit Spaltenvektoren $\vec{s}_1, \cdots, \vec{s}_n$. Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1 & \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_n \\ \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1 & \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{s}_n \cdot \vec{s}_1 & \vec{s}_n \cdot \vec{s}_2 & \dots & \vec{s}_n \cdot \vec{s}_n \end{pmatrix},$$

also $E_n = A^T A$ genau dann, wenn $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$

c) **i)** Es gilt

$$\begin{aligned}
|A\vec{v}|^2 &= (A\vec{v}) \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{v})^T (A\vec{v}) = \left(\vec{v}^T A^T\right)(A\vec{v}) \\
&= \vec{v}^T \left(A^T A\right) \vec{v} = \vec{v}^T E_n \vec{v} = \vec{v}^T \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2.
\end{aligned}$$

ii) Allgemeiner gilt

$$\begin{aligned}
(A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) &= (A\vec{v})^T (A\vec{w}) = \left(\vec{v}^T A^T\right)(A\vec{w}) \\
&= \vec{v}^T \left(A^T A\right) \vec{w} = \vec{v}^T E_n \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w},
\end{aligned}$$

also $\cos\angle(A\vec{v}, A\vec{w})\ |A\vec{v}|\ |A\vec{w}| = \cos\angle(\vec{v}, \vec{w})\ |\vec{v}|\ |\vec{w}|$. Nach **i)** gelten aber $|\vec{v}| = |A\vec{v}|$ und $|\vec{w}| = |A\vec{w}|$. Daher ist $\angle(A\vec{v}, A\vec{w}) = \angle(\vec{v}, \vec{w})$.

d) Aus $1 = \det E_n = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2$ folgt $\det A = \pm 1$.