Musterlösungen zu Serie 3

1. **a)** Dies ist **kein** Unterraum, da W den Nullvektor nicht beinhaltet.

b) Dies ist **kein** Unterraum, da W zwar den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ beinhaltet, aber nicht den Vektor $(-1)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) Dies ist ein Unterraum, denn W ist auch $W = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, das Bild der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass das Bild einer Matrix einen Unterraum bildet.

Alternativ: $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Wir wollen ermitteln, wann die drei Vektoren, linear unabhängig sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Matrix mit den drei Vektoren als Spalten trivialen Kern hat, das heisst im Kern der Matrix ist nur der Nullvektor.
Schreibe also die Vektoren in die Spalten einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese ist schon in Stufenform. Wäre nun eine der Variablen auf der Diagonale, also a, c oder f, gleich 0, dann gibt es nicht triviale Elemente im Kern.
Das heisst die drei Vektoren sind linear unabhängig, falls keiner der Werte a, c, f, gleich 0 ist.

Bitte wenden!

3. **a)** Dazu müssen wir die Eigenschaften eines Unterraumes überprüfen.

·) Der Nullvektor ist in $V^\perp$ enthalten, denn $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ für alle $\vec{v}$ in V.

·) Seien $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ in $V^\perp$, dann

$$(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \cdot \vec{v} = \vec{w}_1 \cdot \vec{v} + \vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0 + 0 = 0$$

für alle $\vec{v}$ in V, so dass $(\vec{w}_2 + \vec{w}_2)$ ebenfalls in $V^\perp$ ist.

·) Sei $\vec{w}$ in $V^\perp$ und k eine beliebige Konstante, dann

$$(k\vec{w}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{w} \cdot \vec{v}) = k \cdot 0 = 0$$

für alle $\vec{v}$ in V, daraus folgt, dass $k\vec{w}$ sich ebenfalls in $V^\perp$ befindet.

b) Wir suchen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x + 2y + 3z + 0.$$

Diese Vektoren sind von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

wobei s, t in $\mathbb{R}$.
In der Tat, die Gleichung $x + 2y + 3z = 0$ definiert eine Bedingung in einem 3-dimensionalen Raum (3 Unbekannte). Der Lösungsraum ist dann 2-dimensional, das heisst, es gibt zwei Freiheitsgrade. Sei zum Beispiel $z = t$ und $y = s$ für t, s beliebige Zahlen in $\mathbb{R}$. Dann folgt aus der Gleichung, dass $x = -2s - 3t$, woraus die obige Form (1) folgt.

Schlussendlich können wir aus (1) ablesen, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $L^\perp$ bilden.

Siehe nächstes Blatt!

4. Verwenden Sie folgenden Fact aus der Vorlesung. Für eine $(n \times n)$-Matrix M ist äquivalent

·) M ist invertierbar.

·) $\det(M) \neq 0$.

·) Die Spalten von M bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

·) Die Zeilen von M bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$

·) Die Matrix, die der Gaussalgorithmus liefert (Stufenform) hat keine 0 auf der Diagonalen stehen, i.e. $\det \neq 0$.

a) Schreiben Sie die Vektoren in die Spalten einer Matrix wenden Sie den Gaussalgorithmus an

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & -8 \end{pmatrix} \overset{II,III,IV-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -9 \end{pmatrix} \overset{IV-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV-2III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat keine 0 auf der Diagonalen stehen, d.h. die ursprüngliche Matrix ist invertierbar und somit bilden die Vektoren in der Tat eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Bemerkung: Die Matrix, die der Gaussalgorithmus liefert hat Determinante

$$\det = 1(-2)3(-12) = 72$$

gemäss der Eigenschaften der Determinante, dies ist derselbe Wert der Determinante der ursrpünglichen Matrix.

Alternative: berechnen Sie die Determinante der Matrix mit Hilfe des Laplace-Verfahren und überprüfen Sie ob diese $\neq 0$.

b) Wie vorher, schreiben Sie die Vektoren in die Spalten einer Matrix und wenden Sie den Gauss-Algorithmus an,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & k \end{pmatrix} \overset{IV-2I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & k-1 \end{pmatrix} \overset{IV-3II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & k-13 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV-4III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-29 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Die Matrix, die der Gaussalgorithmus liefert hat genau dann eine 0 auf der Diagonalen, wenn $k - 29 = 0$. Das heisst wie vorhin, die Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$, wenn $k \neq 29$.

5. **a)** Elementare Zeilenoperationen liefern

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -6+s \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 2 & -8 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für $s \neq 1$ hat das System also keine Lösung. Für $s = 1$ ist

$$4x_1 - 2x_2 - 11x_5 = -12, \qquad 2x_3 + 3x_5 = 2, \qquad x_4 - 2x_5 = -1.$$

Wählen wir z.B. x_1 und x_5 als freie Parameter, so ist also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ eine Lösung, d.h. die Lösungen liegen auf der von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -11 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^T$$

aufgespannten Ebene durch den Punkt $(0, 6, 1, -1, 0)$.

b) Aus Teil **a)** folgt, dass $\operatorname{rang} A = 3$ und daher $\det A = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Bestimmung der Dimension:

$$\dim(\{\text{Lsg von } A\vec{x}=\vec{0}\}) = \dim(\ker(A)) = n - \operatorname{Rang}(A) = 5-3 = 2.$$

Zur Erinnerung, eine Gleichung entspricht einer Bedingung an den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Hier haben wir ursprünglich 5 Gleichungen gegeben, aber der Gaussalgorithmus (Teilaufgaben a)) liefert, dass nur 3 der Bedinungen linear unabhängig sind. Unser Gleichungssystem erlaubt also 2 freie Parameter, d.h. der Lösungsraum ist 2-dimensional.

Bestimmung der Lösungsmenge: Der Gaussalgorithmus (Teilaufgabe a)) liefert

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

Das entspricht dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 \qquad\quad - 11x_5 &= 0 \\ 2x_3 \; + \; 3x_5 &= 0 \\ x_4 - \; 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Da wir 2 freie Parameter haben, setzen wir $x_5 = t$ und $x_2 = s$ mit t, s in $\mathbb{R}$. Das gibt oben eingesetzt

$$\begin{aligned} x_4 &= 2t \\ x_3 &= -\frac{3}{2}t \\ x_1 &= \frac{1}{2}s + \frac{11}{4}t. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$