

## Musterlösungen zu Serie 4

### 1. a) Bestimmung der Eigenwerte

Die Eigenwerte einer Matrix  $A$  sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms,  $p(\lambda)$ , wobei

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$

Hier ist

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 8 \\ 0 & 9 - \lambda \end{pmatrix} = (7 - \lambda)(9 - \lambda).$$

Das heisst, die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 7$  und  $\lambda_2 = 9$ .

### Bestimmung der Basis der Eigenräume

Ein Eigenvektor  $v$  erfüllt  $Av = \lambda v$ , das heisst  $(A - \lambda E_n)v = 0$ .

Gesucht ist also eine Basis von  $\ker(A - \lambda E_n)$ .

$$\underline{\lambda_1}: \mathcal{E}_7 = \ker(A - \lambda_1) = \ker \begin{pmatrix} 7 - 7 & 8 \\ 0 & 9 - 7 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\lambda_2}: \mathcal{E}_9 = \ker(A - \lambda_2) = \ker \begin{pmatrix} 7 - 9 & 8 \\ 0 & 9 - 9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das heisst wir haben eine Eigenbasis, nämlich  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**b)** Eigenvektoren:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0$ , Eigenräume:  $\mathcal{E}_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{E}_0 = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**c)** Eigenvektoren:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 9$ ,  $\mathcal{E}_4 = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{E}_9 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**d)** Eigenvektoren:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Da die Matrix eine  $(2 \times 2)$ -Matrix ist, jedoch nur ein Eigenvektor besitzt gibt es keine Eigenbasis.

**Bitte wenden!**

e) Es gibt keine reellwertige Eigenwerte, denn das charakteristische Polynom ist  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ .

f) Eigenwerte:  $\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$

Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \lambda_2 - 2 \end{pmatrix} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2.27 \end{pmatrix} \right\}$

g) Eigenwerte:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ , Eigenbasis:  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

h)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ , Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

i)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ , Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

j)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ ,  $\mathcal{E}_1 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{E}_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Es gibt keine Eigenbasis.

k)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$ , Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

l)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ,  $\mathcal{E}_1 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Es gibt keine Eigenbasis.

m)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ , Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

n)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

o)  $\lambda_1 = 0$ , es gibt keine weiteren reellwertige Eigenwerte,  $\mathcal{E}_0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

2. a) Die Laplacesche Entwicklung nach der ersten Spalte gibt

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1 + 3 = 4 - a.$$

Daher ist  $A$  genau dann regulär wenn  $a \neq 4$ .

b) Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 & a - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & a - \lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 - \lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) ((\lambda + 1)(a - \lambda) - 1) - 3\lambda + 3 \\ &= (\lambda^2 - 1)(a - \lambda) - 4\lambda + 4 = -\lambda^3 + a\lambda^2 - 3\lambda + 4 - a. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$p_A(-2) = 3a + 18 = 3(a + 6)$$

Somit ist  $\lambda_1 = -2$  bloss für  $a = -6$  ein Eigenwert von  $A$ . Mit dieser Parameterwahl ist  $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10$  und eine Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10 = (\lambda + 2) (-\lambda^2 - 4\lambda + 5). \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \hline -4\lambda^2 - 3\lambda \\ \quad 4\lambda^2 + 8\lambda \\ \quad \hline \quad 5\lambda + 10 \\ \quad \quad -5\lambda - 10 \\ \quad \quad \hline \quad \quad 0 \end{array}$$

Die übrigen Eigenwerte von  $A$  sind demnach

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2} = -2 \mp 3,$$

also  $\lambda_2 = -5$  und  $\lambda_3 = 1$ .

c) Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4a - 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{4}{3}(a - 1) \end{pmatrix},$$

es muss also  $a = 4$  sein.

**Bitte wenden!**

3. a) Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der neugeborenen, der einen Monat alten und der mehr als einen Monat alten Kaninchenpaare nach  $n$  Monaten:

n	neugeboren	einen Monat alt	älter als einen Monat	$F_n$
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8
6	5	3	5	13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Allgemein ergibt sich offenbar  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in \mathbb{N}$ .

- b) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist demnach

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+1} + F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix},$$

d.h.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom von  $A$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

hat die Wurzeln  $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , d.h.  $A$  hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = g \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1 - g, \quad \text{wobei} \quad g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

den Goldenen Schnitt bezeichnet. Wegen

$$\begin{pmatrix} -g & 1 \\ 1 & 1-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g & 1 \\ 1 & -\frac{1}{g} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 1 \\ 1 & g \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind die zugehörigen Eigenvektoren von der Form

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mu \begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

- c) Da die Matrix  $A$  nach **b)** diagonalisierbar ist, besitzt  $\vec{x}_0$  für jede Wahl von Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  zu  $\lambda_1$  und  $\vec{v}_2$  zu  $\lambda_2$  eine (eindeutige) Darstellung

$$\vec{x}_0 = \mu \vec{v}_1 + \nu \vec{v}_2 \quad \text{für gewisse} \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Also ist  $\vec{x}_1 = A \vec{x}_0 = \mu \lambda_1 \vec{v}_1 + \nu \lambda_2 \vec{v}_2$  und allgemein

$$\vec{x}_n = A^n \vec{x}_0 = \mu \lambda_1^n \vec{v}_1 + \nu \lambda_2^n \vec{v}_2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wählen wir für  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  z.B. die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-g \end{pmatrix},$$

so folgt  $\left( \begin{array}{cc|c} \mu & \nu & 1 \\ g\mu & (1-g)\nu & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} \mu & \nu & 1 \\ 0 & (1-2g)\nu & 1-g \end{array} \right)$ , also

$$\nu = \frac{g-1}{2g-1} \quad \text{und} \quad \mu = 1 - \nu = \frac{g}{2g-1}$$

und damit

$$\begin{aligned} F_n &= \mu \lambda_1^n + \nu \lambda_2^n = \frac{g}{2g-1} g^n + \frac{g-1}{2g-1} (1-g)^n \\ &= \frac{g^{n+1}}{2g-1} - \frac{(1-g)^{n+1}}{2g-1} = \frac{g^{n+1} - (1-g)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte *Formel von Binet*.

4. Die Idee zur Lösung des Problems ist, ein 2-dimensionales Problem mit Matrizen-schreibweise darzustellen. Das funktioniert folgendermassen:

Setze  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$  und finde  $A$  in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , so dass  $A\vec{v}(t) = \vec{v}(t+1)$ .

Die rekursiven Bedingungen geben, dass  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Induktiv kann man ermitteln, dass

$$\vec{v}(t) = A^t \vec{v}(0).$$

- a) Der Anfangsvektor ist  $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ . Wird die Matrix  $A$  auf  $\vec{v}(0)$  angewendet, sieht man, dass diese Anfangsbedingungen genau einem Eigenvektor der Matrix  $A$  entsprechen, denn

$$A\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

**Bitte wenden!**

Das heisst, dass die allgemeine Lösung entlang dieses Eigenvektors iteriert,

$$\vec{v}(t) = A^t \vec{v}(0) = 2^t \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Daraus können wir die expliziten Formeln direkt ablesen,

$$h(t) = f(t) = 100 \cdot 2^t.$$

**b)** Analog zu Aufgabe a). Der Anfangsvektor ist  $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ .

Die Anwendung der Matrix  $A$  auf  $\vec{v}(0)$  zeigt wieder, dass dieser ein Eigenvektor von  $A$  ist, denn

$$A\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist,

$$\vec{v}(t) = A^t \vec{v}(0) = 3^t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix},$$

entlang dieses Eigenvektors. Dies ergibt die expliziten Formeln

$$h(t) = 200 \cdot 3^t$$

$$f(t) = 100 \cdot 3^t.$$

**c)** Hier ist  $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \end{pmatrix}$ . Für diese Teilaufgabe ist entscheidend, dass wir in Teilaufgaben a) und b) bereits zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden haben, und da die Matrix  $A$  eine  $(2 \times 2)$ -Matrix ist, bilden diese eine Eigenbasis von  $A$  (das heisst,  $A$  ist diagonalisierbar). Um die allgemeine Lösung zu bestimmen schreiben wir den Anfangsvektor  $\vec{v}(0)$  als Linearkombination dieser Eigenvektoren, das heisst

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix},$$

so dass

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= A^t \vec{v}(0) = A^t 4 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + A^t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 2^t \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + 3^t \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir Teilaufgaben a) und b) verwendet haben.

Die expliziten Formeln sind also

$$h(t) = 400 \cdot 2^t + 200 \cdot 3^t$$

$$f(t) = 400 \cdot 2^t + 100 \cdot 3^t.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

## 5. a) Bestimmung der Eigenwerte

charakteristisches Polynom:  $p(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind  $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2}}{2}$ .

Das heisst, die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 1 + i$  und  $\lambda_2 = 1 - i$ .

**Bemerkung 1:** Für eine reelle Matrix gilt: Sobald wir eine nicht-reelle Nullstelle gefunden haben, wissen wir automatisch einen zweiten Eigenwert und Eigenvektor denn, falls  $\lambda$  ein Eigenwert mit Eigenvektor  $v$  ist, dann gilt

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \bar{\lambda}\bar{v},$$

das heisst  $\bar{\lambda}$  ist Eigenwert von  $A$  mit Eigenvektor  $\bar{v}$ .

### Bestimmung der Eigenvektoren

Ein Eigenvektor  $v$  erfüllt  $Av = \lambda v$ , das heisst  $(A - \lambda E_n)v = 0$ , wobei  $v$  nicht der Nullvektor sein darf.

Gesucht ist eine Basis von  $\ker(A - \lambda E_n)$ , wobei dieser Kern ganz bestimmt nicht trivial ist, da die Eigenwerte genau so gewählt wurden, dass es einen nicht Null Vektor gibt, der im Kern enthalten ist.

$\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{1+i\}} &= \ker \begin{pmatrix} 4 - (1+i) & 5 \\ -2 & -2 - (1-i) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix} \\ &= \text{span} \left( \begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2:** Die Ermittlung des Eigenvektors ist ganz leicht. Wir wissen, dass sich ein nicht trivialer Vektor im Kern befindet. Das heisst die Zeilen sind linear abhängig und wir müssen uns hier (da  $n = 2$ ) nur um die "elimination" einer Zeile kümmern. Nehmen wir zum Beispiel die erste Zeile, dann müssen wir einfach nur "konträre" Vielfache subtrahieren, konkret  $(3-i)(-5) + 5 \cdot (3-i) (= 0)$ . Bemerkung 1 liefert uns nun direkt einen Eigenvektor für  $\lambda_2$ , nämlich

$$\overline{\begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix}.$$

Die Eigenbasis ist also  $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix} \right\}$ .

**Bitte wenden!**

**b)** charakteristisches Polynom:  $(-\lambda)^2(1-\lambda)^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$

Eigenwerte:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

Eigenbasis:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$

wobei  $\mathcal{E}_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  und  $\mathcal{E}_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

**c)** charakteristisches Polynom:  $-\lambda^3 - \lambda$

Eigenwerte:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$

Eigenvektoren:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenbasis:  $\{v_1, v_2, v_3\}$

**d)** charakteristisches Polynom:  $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$

Eigenvektoren:  $\mathcal{E}_0 = \text{span} \{e_1, e_3\}$  und  $\mathcal{E}_1 = \text{span} \{e_2\}$ , wobei  $e_1, e_2, e_3$  die Standardbasisvektoren bezeichnen. Wir haben eine 4-reihige Matrix, aber nur 3 linear unabhängige Eigenvektoren, das heisst die Matrix besitzt keine Eigenbasis.