ETH Zürich Sommer 2013
Dr. Ana Cannas da Silva

MUSTERLÖSUNGEN

zur Basisprüfung Mathematik I und II für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. Das Gaussverfahren liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 4 & 1 & p \\ 1 & p & -2 & 1 \\ 2 & 2p & -p^2 & p \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & -2 & 1 \\ p & 4 & 1 & p \\ 2 & 2p & -p^2 & p \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & p & -2 & 1 \\ 0 & 4-p^2 & 1+2p & 0 \\ 0 & 0 & 4-p^2 & p-2 \end{array}\right).$$

Insbesondere ist der Determinantenbetrag der Koeffizientenmatrix $(4-p^2)^2$.

a) Besitzt das System unendlich viele Lösungen, so verschwindet die Determinante der Koeffizientenmatrix, also ist $p^2 = 4$. Aus der letzten Zeile in obiger Umformung folgt damit $p = 2$. Für die Lösungen des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten $z = 0$ und $x + 2y = 1$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

b) Für die Wahl $p = -3$ liefert das Gaussverfahren weiter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Das System hat also die Lösung $(0, -1, 1)$.

Bitte wenden!

2. **a)** Einsetzen ergibt

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v},$$

also ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

b) Das Gaussverfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 haben also die Form $C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$.

c) Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 2 = 8$$

und also $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{8}$.

d) Der verbleibende Eigenwert ist $\dfrac{\det A}{1 \cdot 2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Alternativ sieht man auch direkt ein, dass das charakteristische Polynom von A

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

die Wurzeln 1, 2 und 4 besitzt.

3. **a)** Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

besitzt die Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = 3 \pm 2.$$

Siehe nächstes Blatt!

Für die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des Systems hat also die Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{$\dagger$}$$

Aus der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix}$$

ergeben sich schliesslich $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$.

b) Die Lösung (†) bleibt genau dann beschränkt, wenn $c_1 = c_2 = 0$. Dies wiederum ist nur unter der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = 0$ erfüllt.

4. Die homogene Gleichung $y'' + 2y' + 10y = 0$ hat das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 \quad \text{mit den Wurzlen} \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = -1 \pm 3i.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} \cos(3x) + c_2 e^{-x} \sin(3x)$$

Die allgemeine Lösung y der inhomogenen Gleichung setzt sich aus dieser und einer partikulären Lösung y_p zusammen, d.h. $y = y_h + y_p$.

Eine solche partikuläre Lösung ist z.B. durch $y_p = \frac{1}{2}$ gegeben.

5. Aus $y'(x) = e^{x-y} = e^x e^{-y}$ folgt

$$e^{y(x)} - e^{y(0)} = \int_{y(0)}^{y(x)} e^y \, dy = \int_0^x e^t \, dt = e^x - 1,$$

also, wegen $y(0) = \ln 3$, $e^{y(x)} = e^x + 2$, und daher $y(x) = \ln(e^x + 2)$.

Bitte wenden!

6. Dreimaliges Anwenden der Regel von Bernoulli-de L'Hospital ergibt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.\end{aligned}$$

7. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y)\\ f_y(x,y)\end{pmatrix} &= \frac{x^2}{y-x}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-x}{x^2} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{y-x}{x^2}\end{pmatrix}^T\\ &= \frac{x^2}{y-x}\begin{pmatrix}-\frac{2y-x}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{pmatrix}^T = \frac{1}{y-x}\begin{pmatrix}1-\frac{2y}{x} & 1\end{pmatrix}^T\end{aligned}$$

insbesondere ist $\nabla f(1,2) = (-3,1)^T$. Daher ist der Vektor $(-3,1,-1)^T$ normal zur Tangentialebene und da diese den Punkt $(1,2,f(1,2))$ enthält, gilt

$$-3x+y-z = d = -3+2-f(1,2) = -1-0 = -1.$$

Die Koordinatengleichung ist also $3x-y+z=1$.

8. In kritischen Punkten (x,y) gilt $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, also

$$\begin{aligned} 2x-y&=2 \qquad \text{und}\\ x-2y&=1.\end{aligned}$$

Somit ist $(1,0)$ der einzige kritische Punkt von f. Ferner gilt

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind positiv, da $2>0$ und $2\cdot 2-1=3>0$. Also handelt es sich bei dem kritischen Punkt $(1,0)$ um eine lokale Minimalstelle, bzw. bei dem Funktionswert $f(1,0)=-1$ um ein lokales Minimum.

9. Es sei $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4$. In den globalen Extrema müssen

$$\vec{0} = \nabla f(x,y,z) + \lambda\nabla\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix}1+2\lambda x\\ -1+2\lambda y\\ 2+4\lambda z\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad 0 = \varphi(x,y,z)$$

gelten. Aus der ersten Gleichung folgt $x=-y=z=-\dfrac{1}{2\lambda}$ und damit

$$0 = \varphi\left(-\frac{1}{2\lambda},\frac{1}{2\lambda},-\frac{1}{2\lambda}\right) = \frac{4}{4\lambda^2}-4, \qquad \text{also} \qquad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

aus der zweiten. Die Funktion nimmt auf dem Ellipsoid also

Siehe nächstes Blatt!

- das globale Minimum $f(-1,1,-1) = -4$ und
- das globale Maximum $f(1,-1,1) = 4$ an,

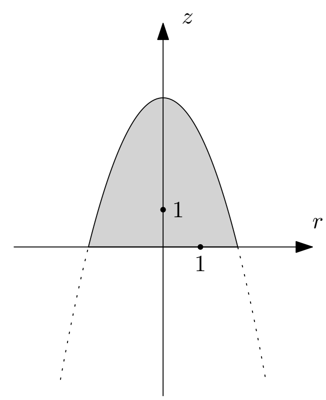
zumal das Ellipsoid beschränkt und abgeschlossen ist.

10. Der Körper ist offensichtlich rotationssymmetrisch, was Zylinderkoordinaten (r, φ, z) für die Berechnung nahelegt. Darin geht die Ungleichung über in

$$0 \le z \le 4 - r^2,$$

woraus $0 \le r \le 2$ folgt.

Das Volumen ist



$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) r\, d\varphi\, dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(4 - r^2\right) r\, dr = 2\pi \left(2r^2\Big|_0^2 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \right) = 8\pi.$$

11. **a)** Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dy}\left(3x^2z^2 - y^2\right) - \frac{d}{dz}\left(6x - 2yz\right) \\ \frac{d}{dz}\left(2xz^3 + 6y\right) - \frac{d}{dx}\left(3x^2z^2 - y^2\right) \\ \frac{d}{dx}\left(6x - 2yz\right) - \frac{d}{dy}\left(2xz^3 + 6y\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2y - (-2y) \\ 6xz^2 - 6xz^2 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und da der Definitionsbereich einfach zusammenhängt (das Vektorfeld ist im ganzen $\mathbb{R}^3$ definiert), handelt es sich bei $\vec{F}$ um ein Gradientenfeld, d.h.

$$\vec{F} = \nabla\varphi \qquad \text{für ein} \qquad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Für ein solches Potential φ gelten

$$\varphi = \int \varphi_x dx = \int \left(2xz^3 + 6y\right) dx = x^2z^3 + 6xy + C(y,z),$$
$$\varphi = \int \varphi_y dy = \int \left(6x - 2yz\right) dy = 6xy - y^2z + C(x,z),$$
$$\varphi = \int \varphi_z dz = \int \left(3x^2z^2 - y^2\right) dz = x^2z^3 - y^2z + C(x,y),$$

also ist $\varphi(x,y,z) = x^2z^3 + 6xy - y^2z + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

b) Da das Feld $\vec{F}$ konservativ ist, hängt die Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt der Strecke ab. Mit dem Potential φ aus **a)** ergibt sich

$$\varphi(2,0,1) - \varphi(0,0,0) = 4 - 0 = 4.$$

für die von $\vec{F}$ längs der Strecke verrichtete Arbeit.

Alternativ lässt sich der Weg durch

$$t \mapsto (1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\0\\t\end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1,$$

parametrisieren. Für die Arbeit folgt

$$\int_0^1 \begin{pmatrix}4t^4\\12t\\12t^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} dt = 20\int_0^1 t^4\,dt = 20\,\frac{t^5}{5}\bigg|_0^1 = 4.$$

12. **a)** Der Kreis C wird z.B. durch

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

parametrisiert. Damit folgt

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\,(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}1\\ \cos t\sin t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} dt \\ &= -\int_0^{2\pi}\sin t\,dt + \int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt = \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\bigg|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

b) Die Hemisphäre H lässt sich z.B. mit sphärischen Koordinaten

$$(\vartheta,\varphi) \mapsto \Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

parametrisieren. Wegen

$$\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\times\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin^2\vartheta\\ \sin\varphi\sin^2\vartheta\\ \sin\vartheta\cos\vartheta\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

ergibt sich

$$\iint_H \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin^2\vartheta \\ \sin\varphi \sin^2\vartheta \\ \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta - \sin\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta\right) d\vartheta \, d\varphi = 0.$$

Alternativ sieht man auch leicht ein, dass für Punkte $(x, y, z) \in H$ gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

und das Flussintegral $\iint_H \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_H \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$ daher verschwindet.