ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Name:	**Departement:**
Vorname:	**Legi-Nr.:**

	1K	2K	Punkte	Bemerkungen:
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Total				

ETH Zürich
Dr. Ana Cannas da Silva

Sommer 2013

BASISPRÜFUNG MATHEMATIK I UND II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

Wichtig:

- Legen Sie Ihre ETH-Karte offen auf den Tisch.
- Füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Schreiben Sie auf alle zusätzlich abgegebenen Blätter Ihren Namen.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Schriftliche Unterlagen
- **kein** Taschenrechner
- **kein** Mobiltelefon

Viel Erfolg!

1. **a)** Bestimmen Sie den Parameter p so, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} p\,x & + & 4\,y & + & z & = & p \\ x & + & p\,y & - & 2\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & 2p\,y & - & p^2\,z & = & p \end{array}$$

unendlich viele Lösungen besitzt und geben Sie die Lösungsmenge an.

3 Punkte

b) Lösen Sie obiges System für den Parameterwert $p = -3$.

2 Punkte

2. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit dem Eigenvektor} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und dem (nicht zu $\vec{v}$ gehörenden) Eigenwert 2. Bestimmen Sie

a) den Eigenwert, zu dem der Eigenvektor $\vec{v}$ gehört.

1 Punkt

b) einen Eigenvektor zum Eigenwert 2.

1 Punkt

c) die Determinante $\det\left(A^{-1}\right)$ der zu A inversen Matrix A^{-1}.

2 Punkte

d) den übrigen Eigenwert von A.

1 Punkt

3. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{$\star$}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung $(x(t), y(t))$ von ($\star$) zur Anfangsbedingung

$$x(0) = 3, \qquad y(0) = 1.$$

4 Punkte

b) Unter welchen Anfangsbedingungen (x_0, y_0),

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0,$$

bleibt die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems ($\star$) beschränkt?

1 Punkt

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 10y = 5$$

4 Punkte

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = e^{x-y}, \qquad y(0) = \ln 3,$$

für die Funktion $y = y(x)$.

3 Punkte

6. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

3 Punkte

7. Es sei

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y-x}{x^2}\right) \qquad 0 < x < y.$$

Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion f in dem Punkt, der über dem Punkt $P = (1,2)$ liegt.

3 Punkte

8. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 - 2x - xy + y + y^2, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

3 Punkte

9. Bestimmen Sie den grössten und den kleinsten Wert, den die Funktion

$$f(x, y, z) = x - y + 2z, \qquad x, y, z \in \mathbb{R},$$

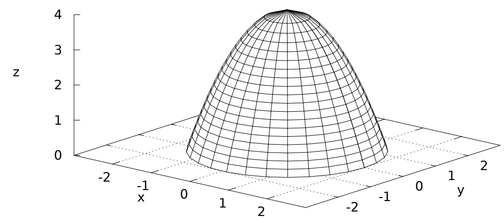
auf dem Ellipsoid $\{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 4\,\}$ annimmt.

4 Punkte

10. Berechnen Sie das Volumen des Paraboloidstumpfs im $\mathbb{R}^3$, der durch

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

gegeben ist, indem Sie in geeigneten Koordinaten integrieren.



4 Punkte

11. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

a) Handelt es sich bei $\vec{F}$ um ein Gradientenfeld? Geben Sie eine Potentialfunktion an oder begründen Sie, weshalb es eine solche nicht gibt.

3 Punkte

b) Berechnen Sie die Arbeit von $\vec{F}$ längs der Strecke, die

den Ursprung $(0,0,0)$ und den Punkt $(2,0,1)$

(in dieser Reihenfolge) geradlinig verbindet.

2 Punkte

12. Es sei C der (von oben betrachtet) positiv orientierte Einheitskreis

$$\{\,(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\,\}$$

in der x-y-Ebene mit Zentrum im Ursprung und

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \\ xz \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie das Umlaufintegral $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$

a) direkt, indem Sie den Kreis C parametrisieren.

3 Punkte

b) mithilfe des Satzes von Stokes als Flussintegral durch die Hemisphäre

$$H = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\}.$$

3 Punkte