Dr. Ana Cannas

# Serie 5: Komplexe Zahlen

**Hinweis**:

Falls Sie mit komplexen Zahlen noch nicht hinreichend vertraut sind, empfehlen wir Ihnen als „Aufwärmübung“ zusätzlich die folgenden Aufgaben: in Papula **Bd. 1** Kapitel VII

- zu Abschnitt 1 die Übungsaufgaben 1,4,5 und 7 (S. 714-715), sowie
- zu Abschnitt 2 die Übungsaufgaben 1,2,4,6,8,11 und 12 (S. 715-717)

**1.** **a)** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

**i)** $\dfrac{1}{1+i}$ **ii)** $\dfrac{3+4i}{2-i}$

**iii)** $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2012}$ **iv)** $\sqrt{i}$

**b)** Skizzieren Sie die Punktmengen

$$R := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z-i| \leq 2 \,\} \qquad \text{und}$$
$$M := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}\, z| \leq 1/2,\ \mathrm{Im}\, z > 0 \,\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

**2.** **a)** Bestimmen Sie Betrag und Argument aller komplexer Zahlen $z$, für die gilt

**i)** $z + 1 = i\sqrt{3}\,(1-z)$ **ii)** $|i\bar{z}| = 2,\ \mathrm{Re}(i\bar{z}) = \sqrt{3}$

**iii)** $(z-2)^3 = 8$ **iv)** $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

**b)** Skizzieren Sie die Spur (d.h. das Bild) der Kurven

$$\alpha(t) = \frac{3}{2}\,e^{i\pi t} + \frac{1}{2}\,e^{-i\pi t}, \qquad 0 \leq t \leq 2, \qquad \text{und}$$
$$\beta(t) = 2\,e^{(-1+i\pi)t}, \qquad 0 \leq t < \infty,$$

in der komplexen Zahlenebene.

**Bitte wenden!**

**3.** Es sei

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, \qquad z \in \mathbb{C},$$

eine polynomiale Funktion mit reellen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

**a)** Zeigen Sie, dass mit jeder Wurzel $z$ von $P$ auch $\bar{z}$ eine solche Wurzel ist.

**b)** Angenommen, $P$ nimmt die folgenden Werte an:

$$P(1) = 6, \quad P(-1) = -2 \qquad \text{und} \qquad P(i) = -2 - 2i.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $a$,$b$,$c$ und $d$.

**4.** **a)** Sind die folgenden Matrizen invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 3-i & 4 \\ -2 & -3+i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1+2i & 2-i & 0 \\ -i & 2 & 3+4i \end{pmatrix}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Determinante.

**b)** Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 1+i \end{pmatrix}.$$

**5.** Für Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ seien die Matrizen $R_\alpha$ und $S_\alpha$ durch

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen $R_\alpha$ und $S_\alpha$ in Abhängigkeit des Winkels $\alpha$.