Serie 6: Online Test

Einsendeschluss: 15. November 17 Uhr

Bei einigen Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.

---

1. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

√ (a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern

Die Verwendung des Gauss-Algorithmus zeigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

2. Der Winkel zwischen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{2\pi}{3}$

√ (d) $\frac{5\pi}{6}$

Wir verwenden $u \cdot v = |u|\,|v| \cos\phi$, wobei ϕ den Winkel zwischen u und v bezeichnet. Dann ist $\cos\phi = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Also ist $\phi = \frac{5\pi}{6}$.

3. Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Matrix A (d.h. n Gleichungen für n Unbekannte). Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ stets

(a) lösbar.

(b) eindeutig lösbar.

√ (c) lösbar oder unlösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

(d) lösbar, aber vielleicht nicht eindeutig lösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

Z.B. hat $A\vec{x} = \vec{b}$ keine Lösungen für $A = 0_n$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$.

4. Ist der Vektor $\vec{b}$ eine der Spalten der Matrix A, so ist $A\vec{x} = \vec{b}$

√ (a) auf jeden Fall lösbar.

(b) auf jeden Fall unlösbar.

(c) auf jeden Fall eindeutig lösbar.

(d) manchmal lösbar, manchmal unlösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

$A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\vec{b}$ sich als Linearkombination der Spalten von A darstellen lässt. Ist $\vec{b}$ gleich der j-ten Spalte von A, so ist offenbar

$$\vec{x} = (0 \cdots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1} 0 \cdots 0)^T$$

eine Lösung. Die Lösung ist nur eindeutig, wenn A vollen Zeilenrang hat.

5. Es sei 0_n die $n \times n$-Nullmatrix, E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix, $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $A + A = 0_n$.

Ist $2A = 0_n$ so gilt $2a = 0$ für alle Einträge a von A. Daraus aber folgt (für reelle wie komplexe Einträge) $a = 0$ für alle Einträge von A, also $A = 0_n$.

(b) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = 0_n$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

(c) E_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = E_n$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

(d) E_n und 0_n sind die einzigen $n \times n$-Matrizen A mit der Eigenschaft $AA = A$.

Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

6. Für welche der folgenden 3×3-Matrizen A gilt

$$AB = BA = B$$

für alle 3×3-Matrizen B?

√ (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Für keine Matrix, da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt für die $n \times n$-Einheitsmatrix $E_n B = BE_n = B$ für alle $n \times n$-Matrizen B. Daher ist die erste Antwort richtig und die letzte falsch. Die beiden übrigen Matrizen A haben die geforderte Eigenschaft offenbar nicht, wie man leicht durch die Wahl $B = E_3$ nachprüft. So folgt auch, dass E_n im allgemeinen die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft ist.

7. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

(a) 2

(b) 3

(c) 4

√ (d) 6

Es gilt $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6.$

8. Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A = 0$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ stets

(a) unlösbar.

(b) nur lösbar für $\vec{b} = 0$.

(c) lösbar für alle $\vec{b}$, aber nicht unbedingt eindeutig lösbar.

√ (d) lösbar nur für manche $\vec{b}$, aber für kein $\vec{b}$ eindeutig lösbar.

Z.B. hat $A\vec{x} = \vec{b}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist aber unlösbar für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit sind die drei ersten Aussagen falsch. Eine eindeutige Lösung $\vec{x}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ existiert für alle $\vec{b}$ nur, wenn A vollen Rang hat, d.h. $\det A \neq 0$.

9. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + 4x_4 &= 0 \\ -x_2 \quad - 2x_4 &= 0 \\ 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge hat Dimension gleich

(a) 0

√ (b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Wir haben ein Gleichungssystem mit 4 Unbekannten und 3 Gleichungen. Man überprüft leicht, dass die drei Gleichungen linear unabhängige Bedingungen an die Unbekannten stellen und daher ist der Rang der Koeffizientenmatrix genau 3. Die Dimension der Lösungsmenge ist gleich der Dimension des Kerns der Koeffizientenmatrix also gleich $n - \text{rank} = 4 - 3 = 1$.

10. Gegeben sei ein homogenes System mit 5 Gleichungen und 4 Variablen, wobei die Koeffizientenmatrix Rang 2 hat. Dann ist die Lösungsmenge

(a) leer

(b) ein Punkt

(c) eine Gerade

√ (d) eine Ebene

Die Lösung des homogenen Systems enspricht genau des Kerns der Koeffizientenmatrix. Wir wissen aus der Vorlesung, dass für eine Matrix M,

$$\dim \ker M = n - \operatorname{rank} M = 4 - 2 = 2.$$

Das heisst die Lösungsmenge ist 2 dimensional, wird also durch eine Ebene beschrieben. Bemerken Sie, dass obwohl 5 Gleichungen gegeben sind, wir nur 4 Variablen haben, das heisst $n = 4$.

11. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\det A = 6$.

Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

(b) $\det B = 4$.

Es gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$$

√ (c) $\det(AB) = 24$.

Es gilt $\det(AB) = \det A \det B = 2 \cdot 12 = 24$.
Dies ergibt sich auch durch folgende Rechnung:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 18 & 12 \\ 2 & 3 & 3 & 10 \\ 6 & 7 & 6 & 22 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 18 & 12 \\ 2 & 3 & 3 & 10 \\ 6 & 7 & 6 & 22 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & -2 & -48 & -14 \\ 0 & -6 & -51 & -30 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -15 & -2 \\ -2 & -48 & -14 \\ -6 & -51 & -30 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -15 & -2 \\ -2 & -48 & -14 \\ 0 & 93 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 48 & 14 \\ 0 & 93 & 12 \\ 0 & 15 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 93 & 12 \\ 15 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 31 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 24(31 - 30) = 24.$$

√ (d) $\det(BA) = 24$.

Es gilt $\det(BA) = \det B \det A = 12 \cdot 2 = 24$.
Dies ergibt sich auch durch folgende Rechnung:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 18 & 9 & 16 \\ 0 & 2 & 13 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 13 \\ 0 & 12 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 9 & 16 \\ 0 & 2 & 13 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 13 \\ 0 & 12 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 9 & 16 \\ 0 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & -10 & -2 & -3 \\ 0 & 12 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 13 & 5 \\ -10 & -2 & -3 \\ 12 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 13 & 5 \\ 0 & 63 & 22 \\ 0 & -69 & -24 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 63 & 22 \\ -69 & -24 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ -23 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 24(-21 + 22) = 24.$$

12. Die dritte Spalte der zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ inversen Matrix ist

(a) $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

√ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Gauss-Algorithmus zur Ermittlung der Inversen liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

13. Sei $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen ist für alle $n \times n$-Matrizen A und B sowie alle komplexen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ richtig?

(a) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

Z.B. ist $\det E_2 = 1$ aber $\det(2E_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2$.

(b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Z.B. ist $\det(E_2 + E_2) = \det(2E_2) = 4 \neq 2$.

(c) $\det(AB) = \det A + \det B$.

Z.B. ist $\det(E_2 E_2) = \det(E_2) = 1 \neq 2$..

√ (d) $\det(AB) = \det B \det A$.

Es gilt $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A$.

14. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $A^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A^{33} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

√ (c) $A^{33} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(d) $A^{33} = \begin{pmatrix} 3^{33} & -2 \\ 4 & (-3)^{33} \end{pmatrix}$

Man überprüft, dass $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das heisst gerade Potenzen von A sind wieder die Einheitsmatrix und insbesondere ist $A^{32} = E_2$ woraus folgt, dass $A^{33} = A$.

15. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Nullvektor kann *per definitionem* kein Eigenvektor sein.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offenbar nicht kolinear.

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offenbar nicht kollinear.

√ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Offenbar ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

16. Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

√ (a) A.

(b) B.

√ (c) C.

(d) Keine. 0 kann *per definitionem* kein Eigenwert sein.

Die Determinanten von A und C sind $\det A = 0$ und $\det C = 0$, das heisst die Matrizen sind singulär und müssen somit den Eigenwert 0 haben. Jedoch ist $\det B = 6$, also ist B regulär und 0 kann kein Eigenwert sein.

17. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede reelle 2×2-Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte.

Falsch, z.B. besitzt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den doppelten EW 1.

(b) Jede reelle 2×2-Matrix hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

Falsch, z.B. besitzt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nur die EV $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Besitzt eine reelle 2×2-Matrix nur einen Eigenwert, so sind alle ihre Eigenvektoren kolinear (d.h. linear abhängig).

Falsch, z.B. besitzt die Einheitsmatrix E_2 den einzigen EW 1

√ (d) Besitzt eine reelle 2×2-Matrix einen komplexen Eigenwert, so ist die Summe Ihrer Eigenwerte reell.

Richtig, denn mit λ ist auch $\bar{\lambda}$ ein EV und $\lambda + \bar{\lambda} = 2 \operatorname{Re} \lambda$

18. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Die Eigenwerte einer invertierbaren Diagonalmatrix sind alle $\neq 0$.

Richtig. Die Diagonaleinträge sind hier gerade die Eigenwerte. Wenn 0 ein EW ist, ist das Produkt der Diagonaleinträge also gleich Null. Dieses Produkt ist hier aber gleich der Determinanten der Matrix, die nach Voraussetzung von 0 verschieden ist.

√ (b) Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix ist auch ein Eigenvektor der Inversen Matrix.

Richtig. Multipliziert man beide Seiten von $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ von links mit A^{-1}, so ergibt sich

$$\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\lambda\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x},$$

also $A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}$. Ist also $\vec{x}$ ein EV der Matrix A zum EW λ, so ist $\vec{x}$ auch ein EV der inversen Matrix A^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$.

(c) Jede Matrix mit positiver Determinante hat mindestens einen positiven Eigenwert.

Falsch, z.B. hat $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Determinante 1 und den doppelten EW -1.

(d) Jede quadratische Matrix mit reellen Koeffizienten hat reelle Eigenwerte.

Falsch, z.B. hat $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1$, welches keine reellen Nullstellen besitzt.

19. Welche der folgenden Vektoren sind linear unabhängig?

√ (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

ist von 0 verschieden.

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der zweite Vektor ist die Summe des ersten und dritten.

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Drei Vektoren in der Ebene sind stets linear abhängig.

√ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren sind offenbar nicht kollinear.

20. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist

(a) diagonal.

Offenbar gibt es abseits der Diagonalen nicht-Null Einträge.

$\surd$ (b) diagonalisierbar.

Auf der Diagonalen stehen bereits die Eigenwerte. Diese sind alle verschieden und somit gehört zu jedem Eigenwert genau ein Eigenvektor. Also gibt es eine Eigenbasis und somit ist die Matrix diagonalisierbar.

(c) nicht diagonalisierbar.

Auf der Diagonalen stehen bereits die Eigenwerte. Diese sind alle verschieden und somit gehört zu jedem Eigenwert genau ein Eigenvektor. Also gibt es eine Eigenbasis und somit ist die Matrix diagonalisierbar.

(d) invertierbar.

Die Matrix hat Determinante 0, da auf der Diagonalen eine 0 steht.

$\surd$ (e) nicht invertierbar.

Die Matrix hat Determinante 0, da auf der Diagonalen eine 0 steht.

21. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) A besitzt keine Eigenbasis.

(b) A besitzt eine Eigenbasis.

$\surd$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des Eigenraumes $\mathcal{E}_2$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Eigenbasis für A.

Offenbar ist 2 ein Eigenwert von A, denn das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2$. Der Kern $\ker(A - 2E_2)$ hat Rang 1, das heisst es gibt nur einen Eigenvektor zur $\lambda = 2$, also keine Eigenbasis. Man sieht leicht, das $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu $\lambda = 2$ ist und somit eine Basis von $\mathcal{E}_2$ bildet.

22. Gegeben sei die Ebene $2x - 5y + 3z = 0$. Basen dieses Untervektorraumes sind

$\checkmark$ (a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\checkmark$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wählt man zum Beispiel $y = s$ und $z = t$ als freie Parameter so ist $x = \frac{5}{2}s - \frac{3}{2}t$. Alle Vektoren in der Ebene sind also von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$$

Insbesondere bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis der Ebene.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind Linearkombinationen der obigen, die linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \cdot \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man auch überprüfen, dass die Vektoren in (a) und (d) in der Ebene liegen und linear unabhängig sind. Überprüfen Sie zum Beispiel für (d), dass die Vektoren offenbar linear unabhängig sind und

$$2\,(1) - 5\,(1) + 3\,(1) = 0$$

$$2\,(4) - 5\,(1) + 3\,(-1) = 0.$$

23. Gegeben sei das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2$. Bemerken Sie, dass $p(\lambda)$ nur von λ^2 abhängt.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Das Polynom hat keine Nullstellen (weder reelle noch komplexe).

$\surd$ (b) p hat 4 komplexe Nullstellen.

$\surd$ (c) p hat 2 Paare komplex konjugierte Nullstellen.

(d) Die Nullstellen können nicht bestimmt werden.

Das Polynom kann geschrieben werden als,

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2 = \left(\lambda^2 + 2\right)\left(\lambda^2 + 1\right).$$

Man sieht, dass die Nullstellen genau die komplex konjugierten Paare

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i \text{ und } \lambda_{3,4} = \pm i$$

sind.

24. Sei $z \in \mathbb{C}$. Stets reell sind

$\surd$ (a) $z + \bar{z}$.

(b) $z - \bar{z}$.

$\surd$ (c) $z\bar{z}$.

(d) keine der obigen Zahlen.

Mit $z = x + iy$ bzw. $\bar{z} = x - iy$ ergeben sich

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= x + iy + x - iy = 2x \in \mathbb{R}, \\ z - \bar{z} &= x + iy - x + iy = 2iy \in i\mathbb{R}, \\ z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also sind nur die erste und die dritte Antwort richtig.

25. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gelten

(a) $\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Im}(z)$.

$\surd$ (b) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

$\surd$ (c) $\mathrm{Re}(iz) + \mathrm{Im}(z) = 0$.

(d) keiner der obigen.

Mit $z = x + iy$ bzw. $iz = -y + ix$ ergeben sich

$$\mathrm{Re}(iz) = -y = -\mathrm{Im}(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(iz) = x = \mathrm{Re}(z).$$

Also sind nur die zweite und die dritte Antwort richtig.

26. Die Punktemenge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$ ist

(a) eine Ellipse.

$\surd$ (b) eine Parabel.

(c) eine Hyperbel.

(d) keine der obigen Kurven.

Mit $z = x + iy$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= |z|^2 - (\mathrm{Re}(z) + 1)^2 = x^2 + y^2 - (x+1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\right) - 2x. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um die Parabel $x = \frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}$.

27. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$.

Welche der folgenden Zahlen sind mögliche Werte der Summe $z + w$?

√ (a) 0.

√ (b) $\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) 1.

(d) $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es gelten $z \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{4}} \mid k = 0, 1, 2, 3 \right\}$ und $w \in \left\{ e^{\frac{3\pi i}{6} + \frac{2k\pi i}{3}} \mid k = 0, 1, 2 \right\}$, also

$$z \in \{1, -1, i, -i\} \qquad \text{und} \qquad w \in \left\{ i, \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \frac{\sqrt{3} - i}{2} \right\}.$$

28. Der Wert von $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ is gleich

(a) 1

(b) $-i$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{i}{2}$

√ (d) keine der obigen

$e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

29. Für jeden Winkel α sei

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) Für alle Winkel α und β gilt $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$

Mit der Definition der Matrixmultiplikation und den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = D_{\alpha+\beta} = D_{\beta+\alpha} = D_\beta D_\alpha. \end{aligned}$$

$\surd$ (b) Für alle Winkel α und β gilt $D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta}$.

Berechnet man $D_\alpha D_\beta$ und $D_{\alpha+\beta}$ sieht man, dass diese gleich sind unter der Verwendung der Additionstheoreme für cos und sin.

$\surd$ (c) Für alle Winkel α ist $D_\alpha^{-1} = D_\alpha^T$.

Das zeigt entweder die Verwendung der Formel für Inversen von (2×2)-Matrizen, oder die Feststellung, dass D_α eine orthogonale Matrix ist.

(d) Die Eigenwerte von D_α sind $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ für alle α.

Man ermittelt das charakteristische Polynom $p_\alpha(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$ und sieht direkt, dass $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ keine Nullstellen davon sind.

Bemerkung: Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto D_\alpha \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha \\ v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha \end{pmatrix}$$

entspricht in der Euklidischen Ebene der Drehung im positiven oder Gegenuhrzeigersinn um α mit Zentrum im Ursprung.

30. Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) A hat Eigenwerte -3 und 4.

(b) A hat Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\surd$ (c) A hat Eigenwerte $-3 \pm 4i$.

$\surd$ (d) A hat Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \pm 4i \end{pmatrix}$.

(e) keine der obigen Aussagen.

Das charakteristische Polynom von A ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 25$. Das gibt die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} = -3 \pm 4i.$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = -3 + 4i$ ist eine Basis von

$$\ker \begin{pmatrix} -2 - 4i & -5 \\ 4 & 2 - 4i \end{pmatrix}$$

Betrachtung der ersten Zeile gibt den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 + 4i \end{pmatrix}$ und da die Matrix A reell ist, ist $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 - 4i \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$.