D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 13
Dr. Ana Cannas

Serie 6: Online Test

Einsendeschluss: 15. November 17 Uhr

Bei einigen Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.

---

1. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

(a) keine Lösung

(b) eine eindeutige Lösung

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern

2. Der Winkel zwischen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{2\pi}{3}$

(d) $\frac{5\pi}{6}$

3. Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit quadratischer Matrix A (d.h. n Gleichungen für n Unbekannte). Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ stets

(a) lösbar.

(b) eindeutig lösbar.

(c) lösbar oder unlösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

(d) lösbar, aber vielleicht nicht eindeutig lösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

4. Ist der Vektor $\vec{b}$ eine der Spalten der Matrix A, so ist $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) auf jeden Fall lösbar.

(b) auf jeden Fall unlösbar.

(c) auf jeden Fall eindeutig lösbar.

(d) manchmal lösbar, manchmal unlösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

5. Es sei 0_n die $n \times n$-Nullmatrix, E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix, $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $A + A = 0_n$.

(b) 0_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = 0_n$.

(c) E_n ist die einzige $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft $AA = E_n$.

(d) E_n und 0_n sind die einzigen $n \times n$-Matrizen A mit der Eigenschaft $AA = A$.

6. Für welche der folgenden 3×3-Matrizen A gilt

$$AB = BA = B$$

für alle 3×3-Matrizen B?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Für keine Matrix, da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

7. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 6

8. Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A = 0$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ stets

(a) unlösbar.

(b) nur lösbar für $\vec{b} = 0$.

(c) lösbar für alle $\vec{b}$, aber nicht unbedingt eindeutig lösbar.

(d) lösbar nur für manche $\vec{b}$, aber für kein $\vec{b}$ eindeutig lösbar.

9. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\quad + 4x_4 &= 0 \\ -x_2 \quad\quad - 2x_4 &= 0 \\ 3x_3 - \; x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge hat Dimension gleich

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

10. Gegeben sei ein homogenes System mit 5 Gleichungen und 4 Variablen, wobei die Koeffizientenmatrix Rang 2 hat. Dann ist die Lösungsmenge

(a) leer

(b) ein Punkt

(c) eine Gerade

(d) eine Ebene

11. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\det A = 6$.

(b) $\det B = 4$.

(c) $\det(AB) = 24$.

(d) $\det(BA) = 24$.

12. Die dritte Spalte der zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ inversen Matrix ist

(a) $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. Sei $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen ist für alle $n \times n$-Matrizen A und B sowie alle komplexen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ richtig?

(a) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

(b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(c) $\det(AB) = \det A + \det B$.

(d) $\det(AB) = \det B \det A$.

14. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $A^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A^{33} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A^{33} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(d) $A^{33} = \begin{pmatrix} 3^{33} & -2 \\ 4 & (-3)^{33} \end{pmatrix}$

15. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

16. Welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

(a) A.

(b) B.

(c) C.

(d) Keine. 0 kann *per definitionem* kein Eigenwert sein.

17. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede reelle 2×2-Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte.

(b) Jede reelle 2×2-Matrix hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

(c) Besitzt eine reelle 2×2-Matrix nur einen Eigenwert, so sind alle ihre Eigenvektoren kolinear (d.h. linear abhängig).

(d) Besitzt eine reelle 2×2-Matrix einen komplexen Eigenwert, so ist die Summe Ihrer Eigenwerte reell.

18. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Eigenwerte einer invertierbaren Diagonalmatrix sind alle $\neq 0$.

(b) Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix ist auch ein Eigenvektor der Inversen Matrix.

(c) Jede Matrix mit positiver Determinante hat mindestens einen positiven Eigenwert.

(d) Jede quadratische Matrix mit reellen Koeffizienten hat reelle Eigenwerte.

19. Welche der folgenden Vektoren sind linear unabhängig?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

20. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist

(a) diagonal.

(b) diagonalisierbar.

(c) nicht diagonalisierbar.

(d) invertierbar.

(e) nicht invertierbar.

21. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) A besitzt keine Eigenbasis.

(b) A besitzt eine Eigenbasis.

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des Eigenraumes $\mathcal{E}_2$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Eigenbasis für A.

22. Gegeben sei die Ebene $2x - 5y + 3z = 0$. Basen dieses Untervektorraumes sind

(a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

23. Gegeben sei das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2$. Bemerken Sie, dass $p(\lambda)$ nur von λ^2 abhängt.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Das Polynom hat keine Nullstellen (weder reelle noch komplexe).

(b) p hat 4 komplexe Nullstellen.

(c) p hat 2 Paare komplex konjugierte Nullstellen.

(d) Die Nullstellen können nicht bestimmt werden.

24. Sei $z \in \mathbb{C}$. Stets reell sind

(a) $z + \bar{z}$.

(b) $z - \bar{z}$.

(c) $z\bar{z}$.

(d) keine der obigen Zahlen.

25. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gelten

(a) $\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Im}(z)$.

(b) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

(c) $\mathrm{Re}(iz) + \mathrm{Im}(z) = 0$.

(d) keiner der obigen.

26. Die Punktemenge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$ ist

(a) eine Ellipse.

(b) eine Parabel.

(c) eine Hyperbel.

(d) keine der obigen Kurven.

27. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$.
Welche der folgenden Zahlen sind mögliche Werte der Summe $z + w$?

(a) 0.

(b) $\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) 1.

(d) $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

28. Der Wert von $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ is gleich

(a) 1

(b) $-i$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{i}{2}$

(d) keine der obigen

29. Für jeden Winkel α sei

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Für alle Winkel α und β gilt $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$

(b) Für alle Winkel α und β gilt $D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta}$.

(c) Für alle Winkel α ist $D_\alpha^{-1} = D_\alpha^T$.

(d) Die Eigenwerte von D_α sind $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ für alle α.

30. Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) A hat Eigenwerte -3 und 4.

(b) A hat Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) A hat Eigenwerte $-3 \pm 4i$.

(d) A hat Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \pm 4i \end{pmatrix}$.

(e) keine der obigen Aussagen.