Dr. Ana Cannas

Serie 7: Differentialrechnung

Hinweis:

Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 1** Kapitel III (S. 318-322)

- zu den Abschnitten 9 und 10 die Übungsaufgaben 6,8,10,16,17
- zu den Abschnitten 11,12 und 13 die Übungsaufgaben 1,2,6,12,13

und aus Papula **Bd. 1** Kapitel IV (S. 414-417)

- zu Abschnitt 1 die Übungsaufgabe 2
- zu Abschnitt 2 die Übungsaufgaben 1-7,10,13,16.

1. Zeigen Sie, dass bei den vier *trigonometrischen* Funktionen (Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion) die *Wendepunkte* mit den *Nullstellen* zusammenfallen und berechnen Sie die Steigung der Wendetangenten.

2. Diskutieren Sie unter Verwendung der Hilfsmittel der Differentialrechnung den Verlauf der folgenden Funktionen:

a) $y = \frac{x^2+1}{x-3}$ **b)** $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ **c)** $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{9-x^2}$

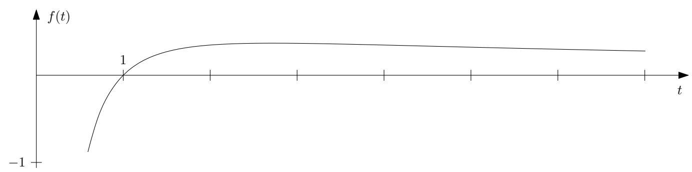
d) $y = \sin^2 x$ **e)** $y = \sin x + \cos x$ **f)** $y = (1-e^{-2x})^2$

3. Eine sogenannte Parabel 3. Ordnung ist vom Typ

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind: Die Parabel geht durch den Koordinatenursprung und besitzt im Punkt $(1, -2)$ einen *Wendepunkt*. Die *Wendetangente* schneidet dabei die x-Achse an der Stelle $x = 2$.

4. **a)** Diskutieren Sie die Funktion $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $t \in (0, \infty)$.



Bestimmen Sie insbesondere ihr Monotonieverhalten und ihren Wertebereich.

b) Es sei α eine feste reelle Zahl.

Untersuchen Sie die Lösbarkeit der Gleichung $\ln x = x^\alpha$ für $x \in (1, \infty)$.

Hinweis: Substituieren Sie $x = e^t$ und machen Sie eine Fallunterscheidung.

c) Geben Sie bei den folgenden Zahlenpaaren jeweils die grössere Zahl an:

i) $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$. ii) $\sqrt{e}^{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\pi}^{\sqrt{e}}$.

iii) $(2.71)^e$, $e^{2.71}$. iv) $(2.72)^e$, $e^{2.72}$.

v) e^π, π^e. vi) 99^{100}, 100^{99}.

d) Für wieviele Paare *natürlicher* Zahlen $n < m$ gilt $n^m = m^n$?

5. Zwei wichtige Sätze über stetige (z.B. differenzierbare) Funktionen sind der

Extremwertsatz. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, eine stetige Funktion, so gibt es Stellen $m, M \in [a, b]$, so dass $f(m) \le f(x) \le f(M)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.*

sowie der

Zwischenwertsatz. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$, dann gibt es für alle $c \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$, so dass $f(x) = c$.*

a) Beschreiben Sie in Worten, was diese Sätze für die Graphen stetiger Funktionen anschaulich bedeuten und geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel, d.h. eine unstetige Funktion, für die die Folgerung des Satzes unzutreffend ist.

Hinweis: Papula Bd. 1 III 4.4.

b) Zur Bestimmung des zeitlichen Ablaufs der Bewegung eines Planeten hat man die sogenannte *exzentrische Anomalie* φ des Planeten zur Zeit t zu ermitteln. Diese genügt der *Keplerschen Gleichung*

$$\varphi - \varepsilon \sin \varphi = \frac{2\pi t}{U}, \tag{1}$$

wobei ε die numerische Exzentrizität der Bahnellipse, U die Umlaufzeit und t die seit dem Periheldurchgang verstrichene Zeit bezeichnen.

Siehe nächstes Blatt!

Zeigen Sie, dass (1) für die realistischen Werte $\varepsilon = 0.1$ und $\frac{2\pi t}{U} = 0.85$ wenigstens eine Lösung φ zwischen 0 und π besitzt.

c) Für viele astronomische Betrachtungen lässt sich die Erdoberfläche mit hinreichender Genauigkeit durch eine Sphäre (eine Kugeloberfläche) approximieren. Es ist dann naheliegend anzunehmen, dass der Temperaturverlauf entlang eines Grosskreises der Erdoberfläche durch eine stetige Funktion beschrieben wird.

Argumentieren Sie, dass es - unter dieser Annahme - auf jedem Grosskreis der Erdoberfläche jederzeit ein Paar antipodaler Punkte gleicher Temperatur gibt.

d) Argumentieren Sie, dass es dagegen nie einen Grosskreis der Erdoberfläche gibt, auf dem jeder Temperaturwert genau zwei Mal angenommen wird.