Serie 8: Newton-Verfahren und Taylor Polynome

Hinweis:

Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 1** Kapitel IV (S. 418-421)

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 1,3,4,11-13,27,28.

und aus Papula **Bd. 1** Kapitel VI (S. 635-639)

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 1,2,5,6,9,18,19.

1. **a)** Approximieren Sie den Wert $\sqrt{5}$, indem Sie drei Iterationsschritte des Newtonschen Verfahrens für $f(x) = x^2 - 5$ und den Startwert $x_0 = 3$ berechnen.

b) Die Gleichung

$$f(x) = x - 0.1 \sin x - 0.85 = 0$$

besitzt genau eine Lösung zwischen 0 und π (vgl. Serie 7).

Approximieren Sie diese Lösung, indem Sie drei Iterationsschritte des Newtonschen Verfahrens für f mit dem Startwert $x_0 = \pi$ berechnen.

Hinweis: Benutzen Sie einen Rechner für die Iteration.

2. **a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom n-ter Ordnung der Funktion f um x_0 und skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und dieses Polynoms für

i) $f(x) = x + \frac{1}{x},\ n = 2,\ x_0 = 1.$ **ii)** $f(x) = \ln x - x,\ n = 2,\ x_0 = 1.$

iii) $f(x) = \frac{\ln x}{x},\ n = 2,\ x_0 = 1.$ **iv)** $f(x) = \frac{x}{x-1},\ n = 3,\ x_0 = 2.$

b) Bestimmen Sie das Maclaurinsche Polynom dritter Ordung der Tangensfunktion und zwar sowohl direkt, als auch unter Verwendung der Identität

$$\tan x \cos x = \sin x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

durch Koeffizientenvergleich.

Bitte wenden!

3. **a)** Berechnen Sie die folgenden Werte mit einem Fehler kleiner als 0.01, indem Sie ein geeignetes Maclaurinsches Polynom der Funktion f auswerten:

i) $\sqrt{e}, \quad f(x) = e^x.$

ii) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad f(x) = e^x.$

iii) $\cos 10°, \quad f(x) = \cos(x).$

iv) $\ln 1.5, \quad f(x) = \ln(1+x).$

b) Ab welcher Ordung approximiert das Maclaurinsche Polynom der Sinusfunktion den Wert $\sin x$ für alle $|x| < 10$ mit einem Fehler kleiner als 0.1?

Hinweis: Die Ordnung ist zweistellig. Benutzen Sie einen Rechner, um die im Restglied auftretenden Fakultäten zu bestimmen.

4. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von Bernoulli-de L'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}.$

b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\arcsin(x-\pi)}{\tan(x-\pi)}.$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}.$

d) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right).$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \displaystyle\int_0^x e^{a\left(t^2-x^2\right)}\, dt\right)$
für eine Konstante $a > 0$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\ln(b+t)}{\sqrt{b+t}}\, dt\right)$
für eine Konstante $b > 0$.

5. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und entscheiden Sie dabei jeweils, ob die Regel von Bernoulli-de L'Hospital anwendbar ist oder nicht:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{e^{\sin x}+1}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (x \ln x).$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \ln x}{x^2-1}.$

d) $\lim\limits_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{2x+\sin x}.$

f) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{(x-c)^2}{x(\ln x - 2) - c(\ln c - 2)}$
für eine Konstante $c > 0$.