Serie 9: Integralrechnung

Hinweis:

Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 1** Kapitel V (S. 559-565)

- zu den Abschnitten 1-7 die Übungsaufgaben 1,3,4,6-11,
- zu Abschnitt 8 die Übungsaufgaben 2-8,10-12 und
- zu Abschnitt 9 die Übungsaufgaben 1-4.

1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration:

a) $\displaystyle\int_1^e t^3 \ln t \, dt.$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, dt.$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{4t} \sin 3t \, dt.$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} \, dt.$

2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch eine geeignete Substitution:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2\,t}{t^2+1} \, dt.$ **b)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t\,\ln^2 t} \, dt.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{2}+1)\,t^2}{\cos^2(\pi t^3)} \, dt.$

3. Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe einer Partialbruchentwicklung des Integranden (vgl. Papula Bd. 1 V 8.3.1):

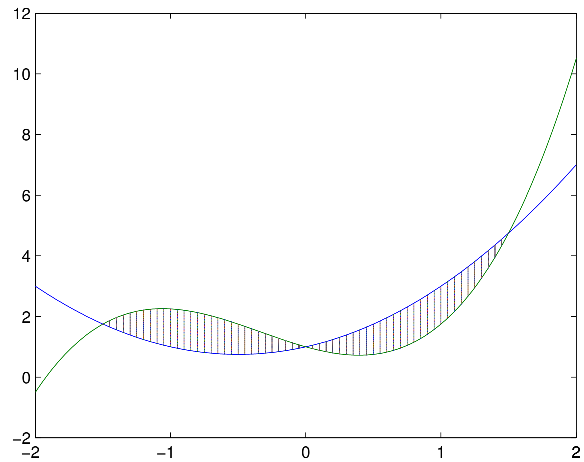
a) $\displaystyle\int \frac{7t-5}{t^2-1} \, dt.$ **b)** $\displaystyle\int \frac{4t^2+4t-11}{(2t-1)(2t+3)(2t-5)} \, dt.$

c) $\displaystyle\int \frac{8t^2-2t-43}{(t-5)(t+2)^2} \, dt.$ **d)** $\displaystyle\int \frac{3t^2-4t-1}{t^3-3t^2+3t-1} \, dt.$

Bitte wenden!

4. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^3 + x^2 - \frac{5}{4}\,x + 1.$$



a) Berechnen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} (f(x) - g(x))\,dx$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

5. Verifizieren Sie die folgenden Identitäten:

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}.$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t\,(2-t)}} = \frac{\pi}{2}.$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $x = \sqrt{\dfrac{t}{2}}$.

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}\,dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$

Hinweis: Verwenden Sie zuerst partielle Integration und dann die Substitution $x = \sqrt{t}$.