Dr. Ana Cannas

Serie 10: Differentialgleichungen erster Ordnung

Hinweis:

Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 2** Kapitel IV

- zu Abschnitt 2 die Übungsaufgaben 2-4,6,13,14,18,19 und 21 (S. 520-524).

1. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme, indem Sie diese durch geeignete Substitutionen auf Gleichungen mit „getrennten Veränderlichen“ zurückführen:

a) $2\,x\,y\,y' - x^2 = y^2,\qquad y(1) = 2.$

b) $y' = (x+y)(x+y+2)+1,\qquad y(0) = -2.$

c) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y + 1)\,,\qquad y(1) = e^{\pi}.$

d) $x^2 y' = y(x-y),\qquad y(e) = \pi.$

2. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch „Variation der Konstanten“:

a) $xy' + y' + y = (x+1)e^{-x},\qquad y(0) = 0.$

b) $y' + 4xy = 4xe^{-2x^2},\qquad y(0) = 3.$

c) $xy' - y = x^2 + x + 1,\qquad y(1) = -3.$

d) $y' \sin x - y \cos x = 4 \sin^4 x,\qquad y(\pi/2) = 0.$

3. Im Jahre 1990 betrug die Weltbevölkerung ca. 5.3 Milliarden. Die Geburtenrate in den 1990ern reichte von 35 - 40 Millionen jährlich, während die Sterberate sich zwischen 15 - 20 Millionen pro Jahr bewegte. Wir nehmen an, die maximale Kapazität für die Weltbevölkerung sei 100 Milliarden.

a) Schreiben Sie die logistische Gleichung für diese Daten auf und verwenden sie als mittlere anfängliche Wachstumsrate $\frac{1}{265}$.

b) Benutzen Sie die Gleichung, um die Weltbevölkerung im Jahr 2000 zu bestimmen und vergleichen Sie die Zahl mit der tatsächlichen Bevölkerung von 6.1 Milliarden.

Bitte wenden!

c) Machen Sie eine Vorhersage für die Weltbevölkerung in den Jahren 2100 und 2500.

d) Wie verändern Sich Ihre Prognosen, falls die maximale Kapazität bei 50 Milliarden liegt?

4. Die pazifische Heilbuttfischerei wurde durch die folgende Differentialgleichung modelliert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

wobei $y(t)$ die Biomasse (totale Population in kg) zur Zeit t (in Jahren) ist, $K = 8 \cdot 10^7$ kg die totale Kapazität und $k = 0.71$.

a) Bestimmen Sie die Biomasse nach einem Jahr, falls $y(0) = 2 \cdot 10^7$ kg.

b) Wie lange dauert es, bis die Biomasse $4 \cdot 10^7$ kg erreicht?

5. Eine Funktion $y(t)$ erfülle folgende Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2.$$

a) Welches sind die konstanten Lösungen der Gleichung?

b) Für welche Werte von y ist y wachsend?

c) Für welche Werte von y ist y fallend?